09. LTI System in Differential Equation

In system engineering, the most common system is the LTI system and its dynamic behaviour is described by the following differential equation:

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

where a_k is constant, k=0,1,…,n, and b_l is constant, l=0,1,…,m. Note that if $n \geq m$ then the system is proper, if $n>m$ then the system is strictly proper, otherwise the system is improper if $n<m$.

By taking the Laplace transform, the differential equation (1) is transformed into the following equation:

$$\begin{aligned} &s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \cdots - s y_{n-2} - y_{n-1} \\ &+ a_{n-1}\left(s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - s^{n-2} y_1 - \cdots - s y_{n-3} - y_{n-2}\right) \\ &+ \cdots + a_1 (sY(s) - y_0) + a_0 Y(s) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &= b_m\left(s^m U(s) - s^{m-1} u_0 - s^{m-2} u_1 - \cdots - s u_{m-2} - u_{m-1}\right) \\ &\quad + b_{m-1}\left(s^{m-1} U(s) - s^{m-2} u_0 - s^{m-3} u_1 - \cdots - s u_{m-3} - u_{m-2}\right) \\ &\quad + \cdots + b_1 (sU(s) - u_0) + b_0 U(s) \end{aligned}$$

where $y_k = y^{(k)}(0^-)$, k=0,1,…,n–1, and $u_l = u^{(l)}(0^-)$, l=0,1,…,m–1. After rearranging (2), we have

$$\begin{aligned} &\left(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) \\ &= \left(b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0\right) U(s) + r_{n-1} s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0 \end{aligned} \tag{3}$$

where r_0, r_1,⋯, r_{n-1} are related to the initial values y_k and u_l. Let

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

$$Q(s) = b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{5}$$

$$R(s) = r_{n-1} s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0 \tag{6}$$

then (3) can be rewritten as

$$Y(s) = Y_0(s) + H(s) U(s) \tag{7}$$

where

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{8}$$

$$Y_0(s) = \frac{R(s)}{P(s)} \tag{9}$$

Taking the inverse Laplace transform of (7), it becomes

$$y(t) = y_0(t) + y_u(t) \tag{10}$$

where $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, $y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_0(s)\}$ and $y_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\}$.

If $u(t)=0$, the system is in free motion and its behaviour depends on its initial conditions y_k, $k=0,1,\ldots,n-1$. Therefore, $y(t) = y_0(t)$, i.e., $y_0(t)$ represents the system's free motion.

If the system is initially ideled, i.e., $y_k = 0$ for $k=0,1,\ldots,n-1$, then $Y_0(s) = 0$ and $y_0(t) = 0$, which leads to $y(t) = y_u(t)$. If the system further encounters the impulse input $u(t)=\delta(t)$, then $U(s)=1$ and $Y(s) = H(s)U(s) + Y_0(s) = H(s)$. Taking the inverse Laplace transform yields $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$. In system engineering, we call $h(t)$ the impulse response. Note that the impulse response is obtained by $u(t)=\delta(t)$ and under the conditions $y_k = 0$ for $k=0,1,\ldots,n-1$.

From the property of convolution in time, the Laplace transform of $h(t)*u(t)$ is $H(s)U(s)$. Therefore, we have

$$y_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = h(t)*u(t) = \int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{11}$$

and then (10) becomes

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{12}$$

which is the total response of the system in (1).

It is noticed that the response (12) implies that the system is not an LTI system. It can be explained by the following case that the system is excited by two inputs $u_1(t)$ and $u_2(t)$ under the same initial conditions $y_k = 0$ for $k=0,1,\ldots,n-1$. The responses are

$$y_1(t) = H[u_1(t)] = y_0(t) + \int_0^\infty h(t-\tau)u_1(\tau)d\tau \tag{13}$$

$$y_2(t) = H[u_2(t)] = y_0(t) + \int_0^\infty h(t-\tau)u_2(\tau)d\tau \tag{14}$$

Now, if the system is excited by the sum of the two inputs, i.e., $u_3(t)=u_1(t)+u_2(t)$, the output is

$$y_3(t) = H[u_1(t)+u_2(t)] = y_0(t) + \int_0^\infty h(t-\tau)(u_1(\tau)+u_2(\tau))d\tau \tag{15}$$

It is quite clear that

$$y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t) \tag{16}$$

Hence, the system (1) is not an LTI system since it doesn't satisfy the superposition unless $y_0(t)$ is negligible.

Fortunately, a system is usually designed to be stable, i.e., the roots of the characteristic equation $P(s)=0$ are all possessed of negative real part, i.e., located in the left half complex plane. According to the Final value theorem, we have

$$y_0(t)\Big|_{t\to\infty} = \mathcal{L}^{-1}\{Y_0(s)\}\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0}[sY_0(s)] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{r_0}{a_0}\right] \to 0 \tag{17}$$

Obviously, as $t\to\infty$ we can neglect $y_0(t)$ and obtain the output as

$$y(t) = y_u(t) = \int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{18}$$

which indeed is an LTI system. The frequency response is

$$Y(s) = H(s)U(s) \tag{19}$$

In system engineering, we call this kind of system as incrementally linear time-invariant system.

If a system is only excited by impulse input $u(t)=\delta(t)$, then from (7) its output is given as

$$y(t) = y_0(t) + h(t) \tag{20}$$

which implies $y(0) = y_0(0)$ and $y(0^+) = y_0(0^+) + h(0^+)$. In other words, we obtain an abruptly change at the initial time since $y(0^+) \neq y(0)$. That is why we don't want the system to face any impulse-like signal, called the noise, since it will leads to undesired and uncomfortable change in the system.

Exercise:

Find the output of the following system:

(A) $\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$, where $y(0)=1$ and $u(t) = \cos t$ for $t\geq 0$.

(B) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{u}(t) - u(t)$,
where $\dot{y}(0) = 0$, $y(0)=1$ and $u(t) = \cos t$ for $t\geq 0$.

(C) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$,
where $\dot{y}(0) = 0$, $y(0)=1$ and $u(t) = \cos t$ for $t\geq 0$.

Exercise:

Find the output of the following system:

(A) $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$,

where $\dot{y}(0)=0$, $y(0)=1$ and $u(t)=cos\,t$ for $t\geq 0$.

［補充資料］常微分方程式

在工程領域中，常微分方程式(Ordinary Differential Equation)是分析動態系統所不可或缺的數學工具，其數學模式如下：

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t) \\ &=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

此式中的變數為 $y(t)$，是一個連續可微的函數，$y^{(k)}(t)$代表 $y(t)$的 k 次微分，其係數 a_k 都是常數，k=0,1,…,n，若是令 $a_n\neq 0$，則變數的最高微分次數為 n，通常稱此式為 n 階的 ODE；而 $u(t)$是已知的輸入訊號，也是一個連續可微的函數，$u^{(l)}(t)$代表 $u(t)$的 l 次微分，其係數 b_l 也都是常數，l=0,1,…,m，且 $b_m\neq 0$；在一般系統中，通常滿足 $n\geq m$，此類系統稱為適當系統(proper system)。

初值條件與唯一解

根據 ODE 的性質，若只給定輸入訊號 $u(t)$，則(1)的解 $y(t)$雖然存在，但不是唯一，必須再設定 n 個與 $y(t)$相關的條件，才可以求得唯一的解，在實際系統中通常使用的條件稱為初值條件(initial conditions)，如下所示：

$$y(t_0)=y_0,\ \dot{y}(t_0)=y_1,\cdots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1} \tag{2}$$

其中 $t=t_0$ 為系統的起始時間，這也是實際系統中所使用的條件。總而言之，在給定輸入訊號與初值條件之後，即可求得唯一的輸出訊號。此外，若設 a_n=1 且令

$$f(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t) \tag{3}$$

則(1)可改寫為

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=f(t) \tag{4}$$

其中 $f(t)$為已知，在此式中，利用到將 a_n 設定為 1 的技巧，有人稱之為”monic”，即”單一化”，這個簡單的技巧雖非必要，但是卻可讓分析的過程更加簡明順暢。

在微分方程領域中已發展出許多求解的技巧，其中最常使用的是拉普拉斯轉換(Laplace transform)，簡稱為拉氏轉換，適用於一般的高階微分方程式；其次是頻譜分析，適用於以弦波函數為輸入的微分方程式，這兩種方法在後面的單元會加以說明。在本單元中，為了清楚說明輸入與初值的影響，將採用最基本的微分方程求解技巧。

齊次解與特殊解

考慮(4)之數學模式，除了與輸入有關的 $f(t)$以外，也與初值條件(2)有關，這些初值條件也可以視為一種不同形式的輸入，因此根據重疊原理，輸出 $y(t)$可分解為與初值有關的齊次解(homogeneous solution)，以及由輸入 $u(t)$所決定的特殊解(particular solution)，表示式如下：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \tag{5}$$

其中 $y_h(t)$為齊次解，滿足下列之齊次方程式(homogeneous equation)：

$$y_h^{(n)}(t)+a_{n-1}y_h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}_h(t)+a_0y_h(t)=0 \tag{6}$$

而 $y_p(t)$為特殊解，滿足

$$y_p^{(n)}(t)+a_{n-1}y_p^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}_p(t)+a_0y_p(t)=f(t) \tag{7}$$

顯然地，(6)與輸入 $u(t)$無關，(7)受輸入之影響。

整個求解過程可分為三個階段，首先求出 $y_h(t)$的通式，其中含有 n 個待解的未知數，接著求出任意一個符合(7)的解，之後再利用初值條件求出 $y_h(t)$通式中的未知數。底下針對整個求解過程作詳細說明。

第一個階段利用(6)求出齊次解 $y_h(t)$的通式。由於此式與輸入無關，因此 $y_h(t)$通常被視為一種系統的本性，且以指數函數 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 來表示，其中 A 與λ 為常數且 $A\neq 0$。接著求出 $y_h(t)$的各次微分項 $y_h^{(k)}(t)=A\lambda^k e^{\lambda t}$，並將它們代入(6)後成為

$$A\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda t}=0 \tag{8}$$

由於 $A\neq 0$ 與 $e^{\lambda t}\neq 0$，故

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{9}$$

此式即(6)之特徵方程式(characteristic equation)，共有 n 個解，表為λ_1、λ_2、…、λ_n，稱為特徵值(eigenvalue)，這些特徵值可能是重根，也可能完全相異，由於重根的情況較為複雜，因此在此先假定所有的特徵值皆相異，以方便說明。

在特徵值完全相異的情況下，齊次解 $y_h(t)$具有 n 種形式，表為 $A_k e^{\lambda_k t}$，$k=1,2,\ldots,n$，不同的特徵值λ_k 會有不同的係數 A_k 與之對應，故

$$y_h(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+A_ne^{\lambda_n t} \tag{10}$$

其中 A_k 與 λ_k 可能是實數，也可能是成對的共軛複數，不過應注意的是，係數 A_k 仍然為未知。

第二個階段求出一個符合(7)的特殊解，其形式通常與輸入相同，為了方便解釋，底下以常數型輸入 $u(t)=U$ 為例，在此情況下，特殊解的形式也設為是定值，也就是說 $y_p(t)=Y_p$，代入(7)後可得

$$a_0Y_p=b_0U \tag{11}$$

故

$$y_p(t)=Y_p=\frac{b_0U}{a_0} \tag{12}$$

由(5)、(10)與(12)三式可知

$$y(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\cdots+A_ne^{\lambda_n t}+\frac{b_0U}{a_0} \tag{13}$$

最後第三個階段再利用(2)的初值條件，逐一代入(13)中輸出 $y(t)$的各高階微分式，則可得

$$\begin{cases} y(t_0)=A_1e^{\lambda_1 t_0}+A_2e^{\lambda_2 t_0}+\cdots+A_ne^{\lambda_n t_0}+\dfrac{b_0W}{a_0}=y_0 \\ \dot{y}(t_0)=A_1\lambda_1e^{\lambda_1 t_0}+A_2\lambda_2e^{\lambda_2 t_0}+\cdots+A_n\lambda_ne^{\lambda_n t_0}=y_1 \\ \ddot{y}(t_0)=A_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 t_0}+A_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 t_0}+\cdots+A_n\lambda_n^2e^{\lambda_n t_0}=y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0)=A_1\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t_0}+A_2\lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t_0}+\cdots+A_n\lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t_0}=y_{n-1} \end{cases} \tag{14}$$

進一步求出 n 個未知係數 A_k，k=1,2,…,n，即完成整個求解的過程。

一階常微分方程式

接著探討 n=1 的一階 ODE，且所使用的輸入是常數訊號 $w(t)=W$，由(4)可得數學模式如下：

$$\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0U, \qquad y(t_0)=y_0, \quad t\ge t_0 \tag{15}$$

其中 $y(t_0)=y_0$ 為初值條件。根據之前的分析，$y(t)$可表為

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t) \tag{16}$$

其中 $y_h(t)$滿足齊次方程式如下：

$$\dot{y}_h(t)+a_0 y_h(t)=0 \tag{17}$$

其特徵方程式為$\lambda+a_0=0$，特徵根為$\lambda=-a_0$，再由(10)可知

$$y_h(t)=Ae^{-a_0 t} \tag{18}$$

其中 A 為任意常數。其次是特殊解 $y_p(t)$，它必須滿足下式：

$$\dot{y}_p(t)+a_0 y_p(t)=b_0 U \tag{19}$$

令 $y_p(t)=Y_p$，則可得特殊解為 $y_p(t)=\dfrac{b_0 U}{a_0}$，故

$$y(t)=Ae^{-a_0 t}+\frac{b_0 U}{a_0} \tag{20}$$

顯然地，還有一個未知數 A 必須經由初值 $y(t_0)=y_0$ 來決定，即

$$y(t_0)=Ae^{-a_0 t_0}+\frac{b_0 U}{a_0}=y_0 \tag{21}$$

此式經整理後可得

$$A=\left(y_0-\frac{b_0 U}{a_0}\right)e^{a_0 t_0} \tag{22}$$

代入(20)後成為

$$y(t)=\left(y_0-\frac{b_0 U}{a_0}\right)e^{-a_0(t-t_0)}+\frac{b_0 U}{a_0} \tag{23}$$

此即為(15)的全解。

在 ODE 中，還有一些與齊次解 $y_h(t)$有關的重要觀念，必須做進一步的說明。由於 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$，因此根據指數函數的特性，當特徵值$\lambda>0$ 時，$y_h(t)$的大小將隨著時間增加而發散至∞，即$|y_h(\infty)|\to\infty$；反之當特徵值$\lambda<0$ 時，$y_h(t)$將收斂至 0，即 $y_h(\infty)\to 0$；而當特徵值$\lambda=0$ 時，$y_h(t)=A$ 為常數，不會隨時間變動。

時間常數

當系統之特徵值$\lambda<0$ 時，$y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 會隨著時間的變動而收斂，如圖 1 所示，根據指數函數的特性，每經過一個固定時段τ，它的值就會下降為固定的倍率 k，即 $y_h(t+\tau)=ky_h(t)$，當倍率 $k=e^{-1}$ 時，稱固定時段τ為時間常數(time constant)，表示式如下：

$$y_h(t+\tau)=e^{-1}y_h(t)=0.3679\,y_h(t) \tag{24}$$

將 $y_h(t)=Ae^{\lambda t}$ 代入上式，可得 $Ae^{\lambda(t+\tau)}=e^{-1}\left(Ae^{\lambda t}\right)$，進一步整理後成為 $e^{\lambda\tau}=e^{-1}$，即$\lambda\tau=-1$，故時間常數

$$\tau=-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{|\lambda|} \tag{25}$$

單位為 s。此外觀察圖 4.1-1 可知，當時間經過 $t=4\tau$時，已下降至原先的 $e^{-4}\approx 0.0183$ 倍，大約是 1/100 等級的倍率，這在工程上常被視為可忽略的等級，因此在 $t=4\tau$ 的訊號大小，常被用來當作判斷訊號是否收斂的依據。

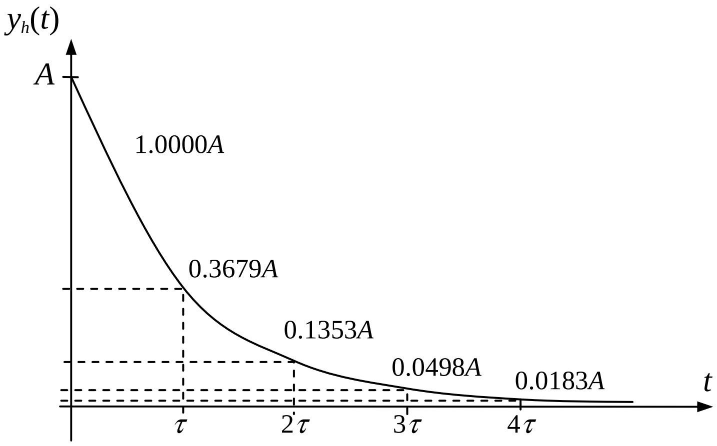

圖 1

在系統理論中，通常稱$\lambda<0$ 的系統為穩定系統(stable system)，$\lambda>0$ 的系統為不穩定系統(unstable system)。對穩定系統而言，因為 $y_h(\infty)\to 0$，使得輸出 $y(t)$ 會隨著時間進展而漸漸與 $y_h(t)$無關，最後趨於穩態，所以一般稱 $y(\infty)$為穩態輸出或穩態響應(steady-state response)，表為

$$y(\infty)=y_h(\infty)+y_p(\infty)=y_p(t)\big|_{t\to\infty} \tag{26}$$

此式代表 $t\to\infty$時的特殊解，就是穩態響應。由(23)可知當特徵值$\lambda=-a_0<0$ 時，指數項 $e^{-a_0(t-t_0)}$在 $t\to\infty$時會收斂至 0，因此穩態響應為

$$y(\infty)=\frac{b_0W}{a_0} \tag{27}$$

利用這個表示式，可將(23)改寫為

$$y(t)=\left(y_0-y(\infty)\right)e^{\lambda(t-t_0)}+y(\infty) \tag{28}$$

或者是

$$y(t)=(y_0-y(\infty))e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}+y(\infty) \tag{29}$$

換句話說，只要給定初值 $y(t_0)=y_0$，並求得特徵值λ或時間常數τ，以及穩態響應 $y(\infty)$，即可求得輸出 $y(t)$。此外，在無輸入之情況下，由於 $w(t)=W=0$，使得穩態響應 $y(\infty)=0$，故輸出訊號可簡化為

$$y(t)=y_0e^{\lambda(t-t_0)} \tag{30}$$

或者是

$$y(t)=y_0e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} \tag{31}$$

顯然地，輸出只與初值條件 $y(t_0)=y_0$ 有關。

《範例》

一階動態方程式如下：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{w}(t)+4w(t),\quad y(1)=4,\quad t\geq 1$$

若輸入為 $w(t)=1$，輸出 $y(t)$為連續函數，則當 $t\geq 1$ 時，$y(t)$為何？

<u>解答：</u>

首先將輸入代入原式，可得方程式如下：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=4$$

令 $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$，且 $y_h(t)$與 $y_p(t)$滿足下列條件：

$$\dot{y}_h(t)+2y_h(t)=0$$

$$\dot{y}_p(t)+2y_p(t)=4$$

接著在步驟[1]中，先根據 $\dot{y}_h(t)+2y_h(t)=0$ 列出特徵方程式 $\lambda+2=0$，並計算出特徵值為$\lambda=-2$，求得 $y_h(t)=Ae^{-2t}$；其次在步驟[2]中，令 $y_p(t)$為常數，則由 $\dot{y}_p(t)+2y_p(t)=4$ 可得 $y_p(t)=2$，最後在步驟[3]中，寫出全解 $y(t)=Ae^{-2t}+2$，再利用初值 $y(1)=4$，可得 $Ae^{-2}+2=4$，即 $A=2e^2$，故當 $t\geq 1$ 時，$y(t)=(2e^2)e^{-2t}+2=2e^{-(t-1)}+2$。

◄◄◄

《範例》

一階動態方程式如下：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{w}(t)+4w(t),\quad y(1)=4,\quad t\geq 1$$

若輸入為 $w(t)=1$，輸出 $y(t)$為連續函數，請說明此電路為何是穩定系統？其時間常數為何？再利用(29)，來求此系統之輸出訊號 $y(t)$。

解答：

首先將輸入 $w(t)=1$代入原式，則可得方程式如下：

$$\dot{y}(t)+2y(t)=4$$

其特徵方程式為 $\lambda+2=0$ ，特徵根為λ=–2，顯然地，λ<0，所以此電路是一個穩定系統。此外，由(25)可知時間常數 $\tau=-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$ ，再由(27)求得 $y(\infty)=\frac{b_0W}{a_0}=2$ ，最後加上初值條件 $y(1)=y_0=4$，即可利用(29)求出輸出

$$y(t)=(y_0-y(\infty))e^{-\frac{1}{\tau}(t-1)}+y(\infty)=(4-2)e^{-2(t-1)}+2=2e^{-2(t-1)}+2$$

此解與上一範例相同。

◄◄◄