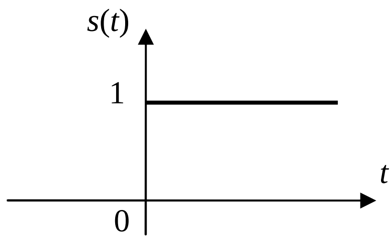
03. Step and Impulse Functions

The most common function used in engineerig is the function with constant value, which is often described as

$$f(t)=\begin{cases}k, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$



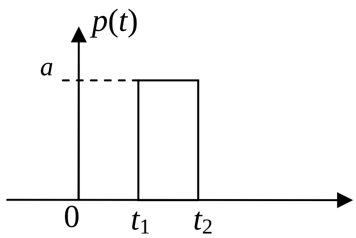
where k is a constant and $f(0)$ is undefined. The special case is called the unit step function

$$s(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

shown in the figure on the right. Clearly, we have

$$f(t)=k\cdot s(t).$$

The unit step function is a kind of singularity function since it possess a discontinuity at t=0. It is known that a pulse function can be expressed by the use of unit step function $s(t)$. For example, the pulse function on the right is written as

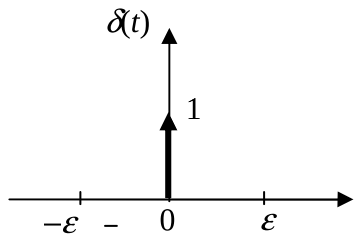


$$p(t)=\begin{cases}a, & t_2<t<t_2\\ 0, & \text{elswhere}\end{cases}$$

or

$$p(t)=s(t-t_1)-s(t-t_2)$$

a function in terms of $s(t)$.



In addition to the step function, an impulse function depicted on the right is also a singularity function, which satisfies the following two conditions:

$$\delta(t)=0, \qquad t\neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1, \qquad \varepsilon>0$$

Since the step function can be expressed as the running integral of $\delta(t)$, i.e.,

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

the derivative of $s(t)$ is theoretically defined as

$$\frac{d}{dt}s(t)=\delta(t)$$

There exists an important property, called the sampling property, of $\delta(t)$ given as below:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

where $f(t)$ is a continuous function. Based on this property, we obtain that any continuous function $f(t)$ can be expressed as

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

which will be used later to derive the property of a linear time-invariant system.

Exercise:

Find the results of the following integrals:

(A) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tau^2+3\tau-sin\,\tau\right)\delta(t-\tau)d\tau$ (B) $\int_{-\infty}^{\infty}\left((t+3)^2+cos\,2t\right)\delta(t-1)dt$

[補充資料] 步階函數

一個常數函數如圖 1(a)所示，表為 $f(t)=k$，$-\infty<t<\infty$，但是在實際系統中都是在一個特定時間點才開始啟動，這個特定時間點即初始時間，以 $t=t_0$ 來表示，事實上最常使用的初始時間為 $t=0$，如圖 1(b)所示，表為 $f(t)=k$，$0<t<\infty$，稱為步階函數，由於存在不連續點，所以屬於奇異函數的一種，表示式為

$$f(t)=\begin{cases}k, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1}$$

其中 $f(0)$並沒有給定。

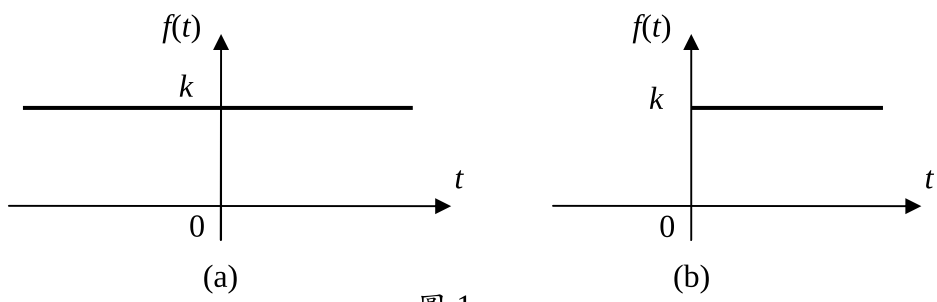


圖 1

為了表示具有初始時間的函數，最常使用的是單位步階函數，如圖 2(a)所示，表示式為

$$s(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{2}$$

利用此式可將(1)式簡化為

$$f(t)=k\cdot s(t) \tag{3}$$

又如圖 2(b)為斜坡函數 $r(t)$，在控制系統中經常使用此函數來測試系統的追蹤性能，表示式為

$$r(t)=\begin{cases}t, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{4}$$

此式也可簡化為

$$r(t)=t\cdot s(t) \tag{5}$$

不論 $s(0)$的值為何，可得 $r(0)=0$，滿足(4)式之條件；再如圖 2(c)為脈波(pulse)函數，表示式為

$$p(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{6}$$

此式也可簡化為

$$p(t)=s(t)-s(t-1) \tag{7}$$

底下再舉一些範例來說明單位步階函數的用法。

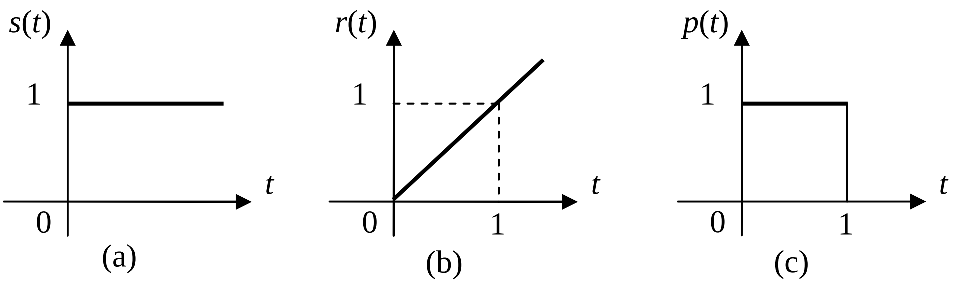
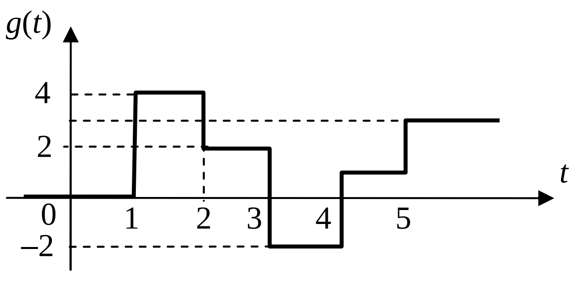


圖 2

<u>範例</u>

利用單位步階函數 $s(t)$寫出右圖之 $g(t)$的表示式。



<u>解：</u>

觀察 $g(t)$可知在 t=1 時，突然

由 0 升高至 4，所以包括 $4s(t-1)$，在 $t=2$ 時，突然由 4 下降至 2，即產生-2 的變化，此變動正好是$-2s(t-2)$所造成的，接著在 $t=3$ 產生-4的突然變化，在 $t=4$ 產生$+3$的突然變化，在 $t=5$ 產生$+2$的突然變化，這些變動分別由$-4s(t-3)$、$3s(t-4)$與 $2s(t-5)$所造成，故可知

$$g(t)=4s(t-1)-2s(t-2)-4s(t-3)+3s(t-4)+2s(t-5)$$

事實上也可以將 $g(t)$在不連續點處加以分割，產生 A、B、C、D 等四個脈波函數，以及一個步階函數 E，如下圖所示，各分割後的訊號如下：

$$A:\ 4\big(s(t-1)-s(t-2)\big)=4s(t-1)-4s(t-2)$$

$$B:\ 2\big(s(t-2)-s(t-3)\big)=2s(t-2)-2s(t-3)$$

$$C:\ -2\big(s(t-3)-s(t-4)\big)=-2s(t-3)+2s(t-4)$$

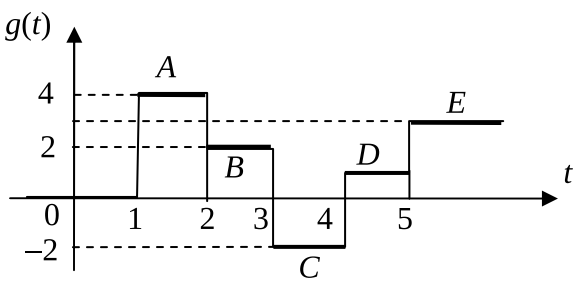
$$D:\ s(t-4)-s(t-5)$$

$$E:\ 3s(t-5)$$

將以上的函數相加後即為 $g(t)$，故

$$\begin{aligned}g(\mathrm{t})&=4s(t-1)-4s(t-2)+2s(t-2)-2s(t-3)\\&\quad-2s(t-3)+2s(t-4)+s(t-4)-s(t-5)+3s(t-5)\\&=4s(t-1)-2s(t-2)-4s(t-3)+3s(t-4)+2s(t-5)\end{aligned}$$

仍然可以得到相同的表示式。



◄◄◄

[補充資料] 脈衝訊號

首先考慮如圖 1(a)中的脈波函數(pulse)$\delta_\Delta(t)$，它的寬度Δ，高度 $1/\Delta$，中心點在 $t=0$，表示式為

$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}\left(s\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)-s\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right) \tag{1}$$

而且滿足以下之積分式

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta_{\Delta}(t)dt=1, \qquad \varepsilon>\frac{\Delta}{2} \tag{2}$$

即不論寬度Δ為何，訊號$\delta_{\Delta}(t)$與時間軸所夾的面積恆為 1。若利用此訊號，令Δ→0，則可得脈衝函數(impulse)$\delta(t)$，滿足以下之條件：

$$\delta(t)=0, \qquad t\neq 0 \tag{3}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1, \qquad \varepsilon>0 \tag{4}$$

如圖 1(b)所示，以直立於 t=0 處的箭號表示，應注意的是$\delta(0)=\infty$，因此在箭頭處所標示的”1”，並非指此函數在 t=0 處的大小，而是指它所包含的面積。

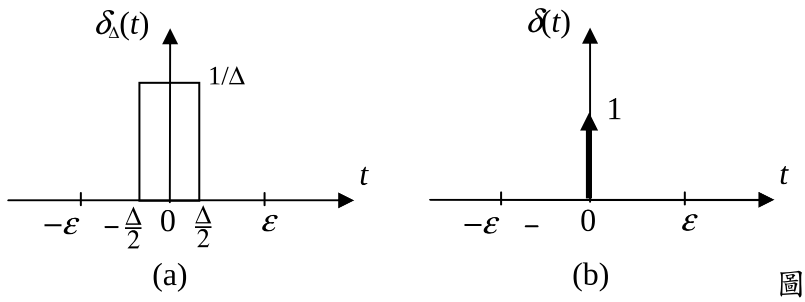


圖 1

由於脈衝函數$\delta(t)$只有在 t=0 時才存在，且$\delta(0)=\infty$，所以是個理想型的函數，並不存在於實際的系統中，為了對它的性質有所了解，首先觀察圖 1(b)可知

$$\delta(t)=\delta(-t) \tag{5}$$

故它是一個偶函數，將此式中的 t 以 $t-t_0$ 取代，可得重要關係式如下：

$$\delta(t-t_0)=\delta(t_0-t) \tag{6}$$

其次利用(3)與(4)兩式可得

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}=s(t) \tag{7}$$

雖然 $s(t)$在 t=0 處不連續，微分不應該存在，但是因為上式中的積分上限具有變數 t，所以引用微積分的概念，特地定義

$$\frac{ds(t)}{dt}=\delta(t) \tag{8}$$

即脈衝函數為步階函數的微分，接著介紹脈衝函數特有的取樣性質(sampling

property)，表示式如下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{9}$$

其中$\delta(t-t_0)$只有在 $t=t_0$時才存在，換句話說，當 $t\neq t_0$時，$\delta(t-t_0)=0$，使得

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{10}$$

代入(9)式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt \tag{11}$$

由於 $f(t_0)$為常數，因此此式可改寫為

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \tag{12}$$

此式中$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = 1$是利用(4)式而得，故驗證了(9)式的取樣性質。

範例

計算下列各積分式：

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} cos(\pi t)\delta(t-1)dt$　　(b) $\int_{-\infty}^{\infty} cos(\pi t)\delta(2t-1)dt$

(c) $\int_{-\infty}^{0} \left(t^2\delta(t-1)+t\delta(t+1)\right)dt$　　(d) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-n)dt$

解：

以上各式利用取樣性質求解如下：

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} cos(\pi t)\delta(t-1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} cos(\pi)\delta(t-1)dt$$

$$= cos(\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-1)dt = cos(\pi) = -1$$

(b) 脈衝函數$\delta(2t\text{-}1)$只有在 $t=\frac{1}{2}$時才有值，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta(2t-1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta(2t-1)dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-1)dt$$

接著利用變數轉換來計算$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-1)dt$，令$\lambda=2t\text{-}1$，則 t 由$-\infty$積分至∞時，λ亦由$-\infty$積分至∞，此外 $d\lambda=2dt$，代入積分式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-1)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda)\cdot\frac{1}{2}d\lambda=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2}$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta(2t-1)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$ 。

(c) $$\int_{-\infty}^{0}\left(t^2\delta(t-1)+t\delta(t+1)\right)dt=\int_{-\infty}^{0}t^2\delta(t-1)dt+\int_{-\infty}^{0}t\delta(t+1)dt$$

$$=0+\int_{-\infty}^{0}(-1)\delta(t+1)dt=(-1)\cdot\int_{-\infty}^{0}\delta(t+1)dt=-1$$

(d) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t\delta(t-n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\delta(t-n)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$$

◄◄◄