02. Natural Exponential Function

The natural exponential function is written as $f(t)=e^{at}$, where e=2.7183… and a can be real or complex. It is known that

$$\frac{df(t)}{dt}=a\cdot e^{at}=a\cdot f(t).$$

Clearly, if a=1, then $\frac{d}{dt}e^{t}=e^{t}$ which implies

$$e^{t}=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots.$$

Commonly, the exponential function with a<0 is often used to express the natural mode of a system. Let $a=-1/\tau$ where τ>0, then we have $f(t)=e^{-t/\tau}$ and

$$f(t+\tau)=e^{-1}\cdot f(t)=0.368\cdot f(t).$$

i.e., if $f(t)$ is shifted by τ then it will decrease by e^{-1} or 0.368. The value τ is defined as the time constant of $f(t)$.

If a is complex and $a=\alpha+j\beta$, where α and β are real, then we can express the exponential function as

$$e^{at}=e^{\alpha t+j\beta t}=e^{\alpha t}\cdot e^{j\beta t}.$$

Since

$$\begin{aligned}e^{j\theta}&=1+j\theta+\frac{(j\theta)^2}{2!}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\cdots\\&=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+j\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)\\&=\cos\theta+j\sin\theta\end{aligned}$$

we have

$$e^{at}=e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t+j\sin\beta t).$$

Then, its derivative becomes

$$\begin{aligned}\frac{d}{d}e^{at}&=\alpha e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t+j\sin\beta t)+\beta e^{\alpha t}\cdot(-\sin\beta t+j\cos\beta t)\\&=e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)+je^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t)\end{aligned}.$$

which can be also obtained from

$$\begin{aligned}\frac{d}{d}e^{at}&=ae^{at}=e^{\alpha t}(\alpha+j\beta)(\cos\beta t+j\sin\beta t)\\&=e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)+je^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t+\beta\cos\beta t)\end{aligned}.$$

Exercise:

Find the derivatives of the following function with respect to t:

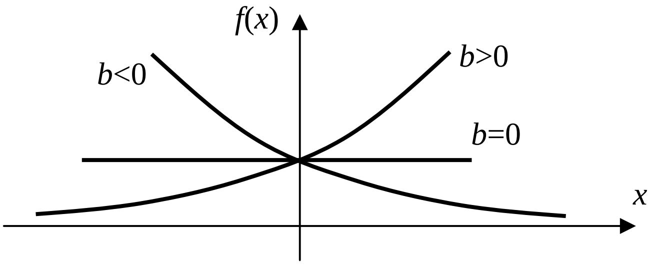
(A) $g(t)=5e^{-3t}$ (B) $h(t)=5e^{(-3+j5)t}$ (C) $p(t)=2^{-4t}$

[補充資料] 指數函數

指數函數(exponential function)存在於許多現有的應用中，例如銀行存款的複利累增計算，也存在於許多自然現象中，例如放射性物質蛻變的半生期衰減，對於系統工程而言，指數函數更是與系統的本性息息相關，它是一個系統是否穩定的重要指標，指數函數的一般式表為

$$f(x) = a^{bx} \tag{1}$$

其中 a 稱為底數，bx 稱為指數，此處 a 與 b 皆為常數，且 $a>1$，$b \in \Re$。圖一為 $f(x)$對 x 的函數圖，當 $b>0$ 時，$f(x)$為遞增函數，當 $b<0$ 時，$f(x)$為遞減函數，當 $b=0$ 時，$f(x)=1$ 為定值，且不論 b 值為何，$f(x)$恆大於 0。



圖一

在指數函數中，最常用的底數是 e=2.7183…，由於任何指數函數的底數可以任意選取，所以(1)式可改寫為以 e 為底的指數函數，表示式如下：

$$f(x) = a^{bx} = e^{kx} \tag{2}$$

若將(2)式取 log_e 的對數運算，則

$$log_e a^{bx} = log_e e^{kx} \tag{3}$$

即

$$bx \cdot log_e a = kx \qquad \text{或} \qquad k = b \cdot log_e a \tag{4}$$

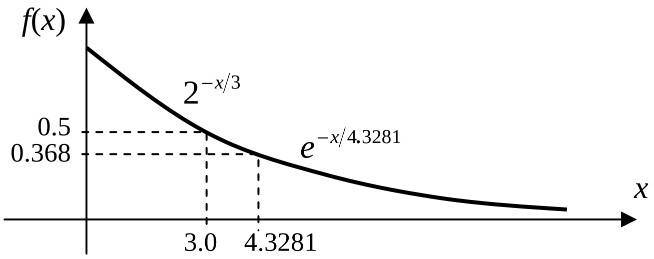
以圖二中的指數函數 $f(x) = 2^{-x/3}$ 為例，此函數以 2 為底數，且 $f(x+3) = \frac{1}{2} f(x)$，故 x 每增加 3，$f(x)$減為一半，換句話說，$f(x) = 2^{-x/3}$ 的半生期為 3；若利用(4)式可得

$$k = -\frac{1}{3} \cdot log_e 2 = -0.2310 = -\frac{1}{4.3281} \tag{5}$$

即

$$f(x) = 2^{-x/3} = e^{-x/4.3281} \tag{6}$$

此函數以 e 為底數，且 $f(x+4.3281) = \frac{1}{e} f(x) = 0.368 f(x)$，故 x 每增加 4.3281，$f(x)$會減為 0.368 倍，或 e^{-1} 倍，在系統工程中稱 4.3281 為 $f(x) = e^{-x/4.3281}$ 的時間常數(time constant)。



圖二

以 e 為底的指數函數，也稱為自然指數函數，其標準式為 $f(x)=e^x$，而底數通常以下式求得

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7}$$

此式是由 Jacob Bernoulli 在 1683 年所發表，若進一步分析(7)式，可得

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_k^n\left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2.7183\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

同樣地利用(7)式，可以將自然指數函數表為

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{x}{n}\right]^n \tag{9}$$

再進一步分析(9)式，可得

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}C_k^n\left(\frac{x}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{n}\right)^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

將 e^x 對 x 微分後，可得

$$\begin{aligned} \frac{de^x}{dx} &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=e^x \end{aligned} \tag{11}$$

此式是自然指數函數最重要的一個性質：自然指數函數 e^x 經過微分運算後，所得的結果是它自己。此特性在系統工程的分析中扮演著相當重要的角色。

[補充資料] 弦波函數

弦波函數(sinusoidal function)是系統工程中最重要的一個函數，它的大小會隨著時間做週期性的變化，如圖 1 所示，數學式為

$$
\begin{aligned}
v(t) &= V_m cos(\omega(t-t_0)) = V_m cos(\omega t+\theta) \qquad (1)\\
&= V_m cos(2\pi f t+\theta) = V_m cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right)
\end{aligned}
$$

其中 V_m 為振幅，f 為頻率(Hz)，$\omega=2\pi f$ 為角頻率(rad/s)，T 為週期(s)，$\theta=-\omega t_0$ 為相位，應注意的是相位θ可以利用弳度(rad)或角度(degree)來表示，如果在計算過程中必須與ωt 相加減時，相位θ僅能採用弳度(rad)，否則將造成嚴重的錯誤。

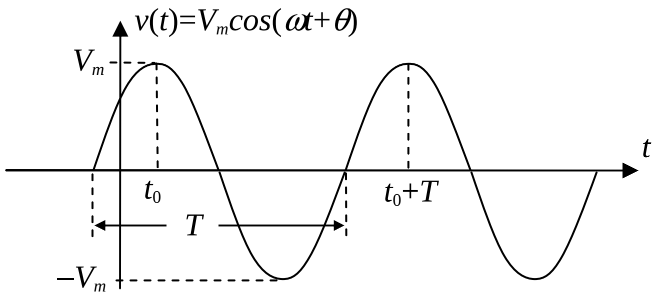


圖 1

除了單純的弦波函數外，在系統工程中有時也會處理收斂式或發散式(underdamped)的弦波函數，表示式如下：

$$
v(t) = V_m e^{\alpha t} cos(\omega t+\theta) \qquad (2)
$$

當$\alpha=0$ 時，即圖 1 之弦波訊號，當$\alpha<0$ 時，為收斂式弦波函數(damped sinusoidal function)，如圖 2(a)所示，當$\alpha>0$ 時，為發散式弦波函數(underdamped sinusoidal function)，如圖 2(b)所示。

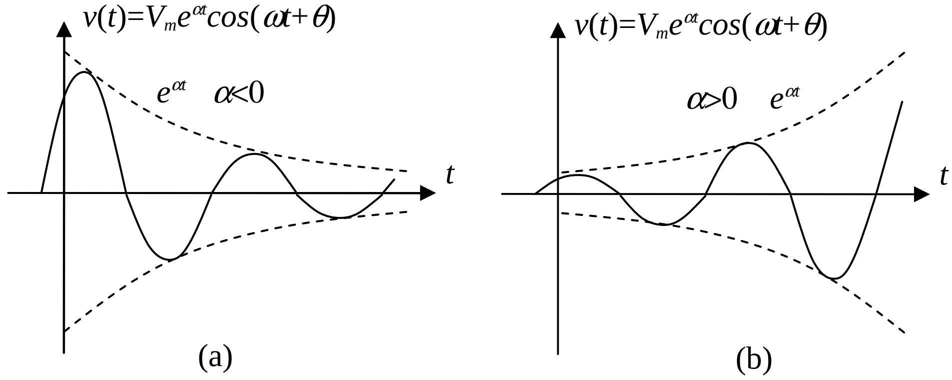


圖 2

底下列出與弦波函數相關的基本公式，由於大部分的公式都已經在數學三角函數的課程中介紹過，所以在此不再贅述，公式如下：

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t-\theta),\quad \theta = \tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{3}$$

$$\cos(\omega_1 \pm \omega_2)t = \cos\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t \mp \sin\omega_1 t\cdot\sin\omega_2 t \tag{4}$$

$$\sin(\omega_1 \pm \omega_2)t = \sin\omega_1 t\cdot\cos\omega_2 t \pm \cos\omega_1 t\cdot\sin\omega_2 t \tag{5}$$

$$\cos 2\omega t = \cos^2\omega t - \sin^2\omega t = 1-2\sin^2\omega t = 2\cos^2\omega t - 1 \tag{6}$$

$$\sin 2\omega t = 2\cos\omega t\cdot\sin\omega t \tag{7}$$

此外，若是必須對(2)式做微分處理時，通常都會將弦波函數先轉換為複數形式，表示式如下：

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} = Re\left(e^{j\omega t}\right) \tag{8}$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} = Im\left(e^{j\omega t}\right) \tag{9}$$

利用以上的轉換式可得

$$\begin{aligned}\frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(V_m e^{\alpha t}\cos(\omega t+\theta)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(V_m e^{\alpha t}\cdot Re\left(e^{j(\omega t+\theta)}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(Re\left(V_m e^{\alpha t}e^{j(\omega t+\theta)}\right)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(Re\left(V_m e^{(\alpha+j\omega)t}e^{j\theta}\right)\right) = Re\left(\frac{d}{dt}\left(V_m e^{(\alpha+j\omega)t}e^{j\theta}\right)\right) \\ &= Re\left(V_m(\alpha+j\omega)e^{(\alpha+j\omega)t}e^{j\theta}\right) = V_m e^{\alpha t}Re\left((\alpha+j\omega)e^{j(\omega t+\theta)}\right) \\ &= V_m e^{\alpha t}Re\left(Ae^{j\phi}e^{j(\omega t+\theta)}\right) = V_m e^{\alpha t}Re\left(Ae^{j(\omega t+\theta+\phi)}\right) \\ &= A\cdot V_m e^{\alpha t}\cos(\omega t+\theta+\phi) \\ &= \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\cdot V_m e^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\theta+\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $A=\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$，$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$，由上式可知當$\alpha$=0 時，即$v(t)=V_m\cos(\omega t+\theta)$，其微分為

$$\begin{aligned}\frac{dv(t)}{dt} &= \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\cdot V_m e^{\alpha t}\cos\left(\omega t+\theta+\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\right)\Bigg|_{\alpha=0} \\ &= \omega\cdot V_m\cos(\omega t+\theta+90^\circ)\end{aligned} \tag{11}$$

所得函數的相位超前90°，振幅變為ω倍。

範例

計算下列之 A 與 θ：

(a) $\dfrac{d sin(2t)}{dt} = A cos(2t+\theta)$

(b) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{-3t} cos(4t)\right) = A e^{-3t} cos(4t+\theta)$

解：

(a)
$$\begin{aligned}
\frac{d sin(2t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(cos(2t-90°)\right) = \frac{d}{dt}\left(Re\left(e^{j(2t-90°)}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(cos(2t-90°)\right) = \frac{d}{dt}\left(Re\left(e^{j(2t-90°)}\right)\right) \\
&= Re\left(\frac{d}{dt} e^{j(2t-90°)}\right) = Re\left(j2\cdot e^{j(2t-90°)}\right) \\
&= Re\left(2\cdot e^{j90°} e^{j(2t-90°)}\right) = Re\left(2\cdot e^{j2t}\right) \\
&= 2\cdot cos(2t)
\end{aligned}$$

故 $A=2$ ，$\theta = 0°$ 。

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{-3t} cos(4t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(e^{-3t} Re\left(e^{j4t}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(Re\left(e^{-3t} e^{j4t}\right)\right) \\
&= Re\left(\frac{d}{dt} e^{(-3+j4)t}\right) = Re\left((-3+j4)e^{(-3+j4)t}\right) \\
&= Re\left(5e^{j127°} e^{(-3+j4)t}\right) = Re\left(5e^{-3t} e^{j(4t+127°)}\right) \\
&= 5e^{-3t} cos(4t+127°)
\end{aligned}$$

故 $A=5$ ，$\theta = 127°$ 。

◀◀◀