01. Running Integral

Let $g(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$, called a running integral of $f(t)$ and its derivative with respect to t is equal to $f(t)$, i.e.,

$$\frac{dg(t)}{dt}=f(t).$$

If $g(t)=\int_a^t f(t,\tau)d\tau$, another kind of running integral and often used in system engineering, then its derivative is

$$\frac{d\,g(t)}{dt}=f(t,t)+\int_a^t\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,\tau)\right)d\tau.$$

Exercise:

Find the derivatives of the following integrals:

(A) $g(t)=\int_a^b(3\tau+2)d\tau$

(B) $h(t)=\int_a^t(\tau^2-4)d\tau$

(C) $p(t)=\int_a^t(4\tau\, sin(2t)-cos(2\tau))d\tau$

[補充資料]

在處理實際系統時，對時間變數 t 做微分與積分的運算，是最基本的兩項工具，其中微分運算可以讓我們了解系統變數在過去的變化情形，也可以讓我們預測系統變數的未來走向，而積分運算則可以累積過去系統變數的資訊，當系統仍未停止前，所做的積分運算，它的上限必須是現在的時刻 t，因此積分的運算結果不會是定值，而是一個時間函數，此種具有上限為時間變數的積分，特稱為 Running Integral。

在微積分的課程中，所學到的基本定理就是上限具有變數的積分，該定理之敘述如下：

===

假設 $f(t)$在 $a<t<b$ 中為一有限且片段連續(piecewise-continuous)之函數，若是令

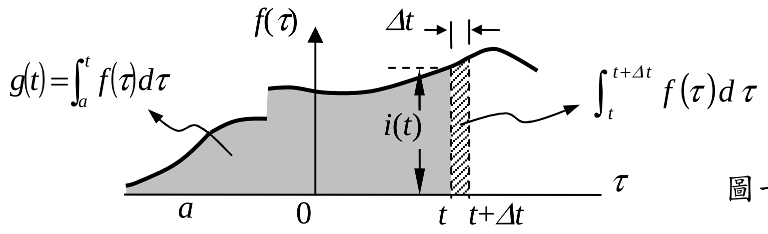
$$g(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau \qquad (1)$$

則 $g(t)$在 $a \le t \le b$ 中亦為連續函數，且當 $f(\tau)$在 t 處連續時可得

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t) \tag{2}$$

==

在電機工程中常以變數 t 代表時間，所以 $g(t)$可視為隨著時間前進變動的函數，此種在上限具有變數的積分 $\int_a^t f(\tau)d\tau$ ，就是 Running Integral。



圖一

從定理中(2)式可知，當 $f(\tau)$在 t 處連續時，$g(t)$的微分正好是被積分項的函數 $f(t)$，今在底下稍做說明：根據微分的定義，$g(t)$的微分可寫為

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[g(t+\Delta t) - g(t)\right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_a^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau - \int_a^t f(\tau)d\tau\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3}$$

以圖一中的 $f(\tau)$為例，當 $f(\tau)$在 t 處連續時，上式中 $\int_t^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau$ 的積分值為圖中的斜線面積，在$\Delta t \to 0$ 的條件下，此斜線面積可視為長 $f(t)$，寬Δt 的矩形面積，即 $\int_t^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau \approx f(t)\Delta t$，代入(3)式可得

$$\frac{dg(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(\tau)d\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left(f(t)\Delta t\right) = f(t) \tag{4}$$

故基本定理中(1)與(2)式之關係成立。

應注意的是，有時我們所面對的積分，是上下限都為已知常數的積分式，如 $h(t) = \int_a^b f(\tau)d\tau$ ，其值 $h(t)$實際上為常數，因此

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^b f(\tau)d\tau = 0$$

在實際的系統中，經常必須考慮初始時間 $t=t_0$ 的變數值，即變數初值，表為 $g(t_0)$，通常為了方便，將初始時間設定為參考時間 $t_0=0$，若直接利用(1)式，將式中的 t

以 0 代入，則可得初值如下：

$$g(0)=\int_a^0 f(\tau)d\tau \tag{5}$$

接著將 $g(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$ 分為兩個時段的積分，改寫成

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_a^0 f(\tau)d\tau+\int_0^t f(\tau)d\tau \\ &= g(0)+\int_0^t f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

換句話說，running integral 可改寫成包括初值的積分式。在電機工程中，若 $g(t)$ 代表電容電壓或電感電流，則 g(0)就是電容電壓或電感電流的初值。

上限具有變數 t 的積分，除了(1)式外，還有另一種更複雜的型式，那就是被積分項(integrand)也與變數 t 有關，其表示式如下：

$$y(t)=\int_a^t p(t,\tau)d\tau \tag{7}$$

其中被積分項 $p(t,\tau)$也是變數 t 的函數，同樣地，根據微分的定義，可將 $y(t)$的微分寫為

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[y(t+\Delta t)-y(t)\right] \qquad (8) \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_a^{t+\Delta t} p(t+\Delta t,\tau)d\tau-\int_a^t p(t,\tau)d\tau\right] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_a^{t+\Delta t} p(t+\Delta t,\tau)d\tau-\int_a^t p(t+\Delta t,\tau)d\tau\right] \\ &\quad +\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_a^t p(t+\Delta t,\tau)d\tau-\int_a^t p(t,\tau)d\tau\right] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_t^{t+\Delta t} p(t+\Delta t,\tau)d\tau\right] \\ &\quad +\int_a^t\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(p(t+\Delta t,\tau)-p(t,\tau)\right)\right]d\tau \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(p(t+\Delta t,t)\cdot\Delta t\right)+\int_a^t\frac{\partial\, p(t,\tau)}{\partial t}d\tau \\ &= p(t,t)+\int_a^t\frac{\partial\, p(t,\tau)}{\partial t}d\tau \end{aligned}$$

重寫如下：

$$\frac{dy(t)}{dt}=p(t,t)+\int_a^t\frac{\partial\, p(t,\tau)}{\partial t}d\tau \tag{9}$$

此微分運算可以應用在系統理論所經常面對的迴旋積(convolution integral)，表示式如下：

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau,\qquad t>0 \tag{10}$$

其中被積分項為 $p(t,\tau)=x(\tau)h(t-\tau)$。對系統而言，$x(t)$是輸入訊號，$y(t)$是輸出訊號，而 $h(t)$是描述系統的函數。在此處我們只說明 $y(t)$的微分，而不探討迴旋積在系統理論中的意義。由於 $p(t,t)=x(t)h(0)$與 $\dfrac{\partial p(t,\tau)}{\partial t}=x(\tau)\dfrac{\partial h(t-\tau)}{\partial t}$ ，利用(9)式可得

$$\frac{dy(t)}{dt}=x(t)h(0)+\int_0^t x(\tau)\frac{\partial h(t-\tau)}{\partial t}\,d\tau \tag{11}$$

由於迴旋積在系統理論中是一個相當重要的表示式，因此如何對迴旋積微分也是必要的技巧。