向量的外積據信是由愛爾蘭最偉大的數學家哈密頓(Hamilton, William Rowan, 1805-1865)在研究三維空間中物體轉動時所發明的一種代數，其基本概念來自哈密頓個人的重大成就—四元數論。

關於目前最常使用的內積及外積符號則是引用吉布斯(Gibbs)於 1902 年之著作<向量分析>所使用的符號，流行至今。

底下開始介紹向量的基本運算及概念。

向量表示式

人們在描述空間中兩點間的關係時，通常會利用向量形式，因為它包含了兩個基本要素：大小(距離的遠近)與方向(相對的方位)，為了表現出這兩個要素，向量通常以箭號來表示，如圖 1 所示，並記為

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_A A \qquad (1)$$

其中數值 $A>0$，代表向量 $\boldsymbol{A}$ 的大小，而 $\boldsymbol{a}_A$ 代表向量 $\boldsymbol{A}$ 的單位向量，其大小為 1，方向與 $\boldsymbol{A}$ 相同。當向量 $\boldsymbol{A}$ 變為 k 倍時，記為 $k\boldsymbol{A}$；當向量 $\boldsymbol{A}$ 反轉時，以 $-\boldsymbol{A}$ 表示，其大小不變，方向相反。

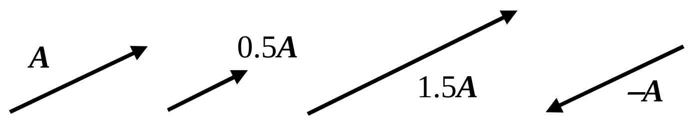

圖 1

向量的基本運算

向量的基本運算計有加法、減法、內積及外積等四種，首先介紹 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 兩向量的加法，表為

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \qquad (2)$$

以圖 2 說明，將 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 兩向量平移成首尾相接之狀況，再連接首尾兩端點後即可獲得 $\boldsymbol{C}$，至於是以 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 為首，其結果都相同，所以

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad (3)$$

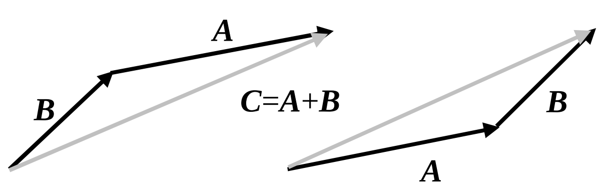

圖 2

即向量加法適合交換律。

有時也可以利用圖 3 所示之平行四邊形法則，在由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所構成的平行四邊形中，畫出對角線，以求得 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$。

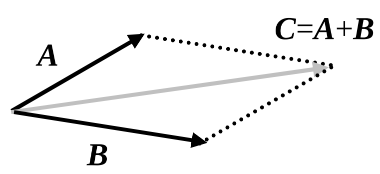

圖 3

除了交換律外，加法還滿足結合律，表示式如下：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \qquad (4)$$

此式代表三個以上的向量相加時，其運算次序並不影響最終的結果。

至於兩個向量的減法運算，一般定義如下：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \qquad (5)$$

亦即先求得反向量$-\boldsymbol{B}$後，再將$\boldsymbol{A}$及$-\boldsymbol{B}$兩向量作加法運算，減法運算並不具有交換律及結合律的特性。

接著是兩向量$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$的內積，定義如下：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \quad , \quad \theta\le 180^{\circ} \qquad (6)$$

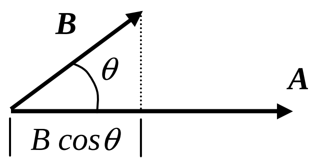

圖 4

其中θ為$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$的夾角，如圖 4 所示，由於內積的結果為數值，所以有時亦稱內積為數值積。

從圖 4 中可知內積為$\boldsymbol{A}$的大小A，乘上$\boldsymbol{B}$在$\boldsymbol{A}$方向的投影量大小$B\cos\theta$，由於在(6)式中$AB\cos\theta=BA\cos\theta$，所以也可以將內積解釋為$\boldsymbol{B}$的大小$B$，乘上$\boldsymbol{A}$在$\boldsymbol{B}$方向的投影量大小$A\cos\theta$，所以

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta=BA\cos\theta=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (7)$$

即向量內積亦適合交換律。

觀察$\cos\theta$值的範圍可知，當$\theta<90^{\circ}$時，內積$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}>0$，當$\theta>90^{\circ}$時，內積$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}<0$，而當$\theta=90^{\circ}$時，內積$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，因此可以利用內積的正負性來判斷兩向量的夾角到底是銳角、鈍角或直角。

利用向量的內積與加法，可求得

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \qquad (8)$$

此式代表向量內積對加法適合分配律。

例

利用內積證明三角餘弦定理：任意三角形之三邊A、B、C必須滿足

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\theta$$

其中θ為A與B兩邊的夾角。

[證明]

將原三角形之各邊化為向量，如圖 5 所示，可知$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，利用(6)式的內積運算、(7)式的交換律及(8)式的分配律可得：

$$\begin{aligned}C^2=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=A^2+B^2-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\\&=A^2+B^2-2AB\cos\theta\end{aligned} \qquad (9)$$

故三角餘弦定理成立。

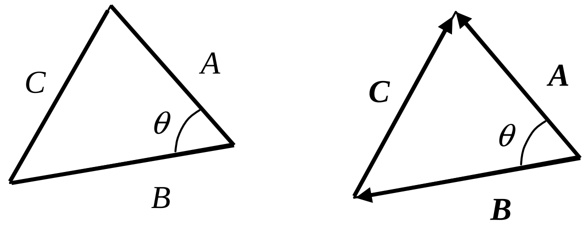

圖 5

□□□

最後是向量的外積，定義如下：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_k\ AB\sin\theta, \qquad \theta\le 180^{\circ} \tag{10}$$

其中θ為 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的夾角，而方向 $\boldsymbol{a}_k$ 如圖 6 所示，符合右手法則，其大小 $AB\sin\theta$ 為平行四邊形的陰影面積，而方向 $\boldsymbol{a}_k$ 分別與兩向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 垂直，亦即 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{a}_k=0$，所以根據(10)式可知

右手法則

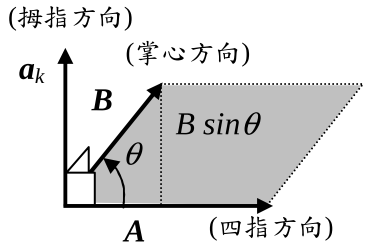

圖 6

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \ \text{ 和 } \ \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{11}$$

由於外積的結果為向量型態，具有方向性，因此向量交換後的外積會造成反向，即

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{12}$$

故外積並不適合交換律。若是兩向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 平行，即θ=0°，則

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_k\cdot AB\sin 0^{\circ}=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

故兩平行向量的外積為 $\boldsymbol{0}$ 向量。利用向量外積與加法直接運算可得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{14}$$

此式代表向量外積對加法亦適合分配律。

三度空間正交基底向量

所謂基底向量是指可以用來表示空間中任意向量的一組獨立向量，其個數正好等於該空間的維度。在三度空間中，基底可以是三個獨立單位向量，記為 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$，此三度空間中的任一向量 $\boldsymbol{A}$ 皆能表為

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{a}_1+A_2\boldsymbol{a}_2+A_3\boldsymbol{a}_3 \tag{15}$$

其中 A_1、A_2、A_3 可視為 $\boldsymbol{A}$ 分別在 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 各方向的分量大小，如果進一步加入限制條件如下：

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1=0 \tag{16}$$

即三個基底向量兩兩相互垂直，則稱 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 為一組正交基底向量，由於(16)式無法確認 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 三者間的關係，通常還需加上外積的關係如下：

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 \ , \quad \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \ , \quad \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 \tag{17}$$

此式代表 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 的方向符合右手法則，如圖 7 所示，這是一組最常被使用的正交基底向量。事實上，只要(17)式成立，則(16)式亦必成立。

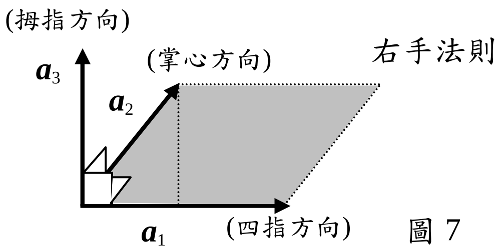

圖 7

若以 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 為三度空間中的一組正交基底向量，則該空間中的任意兩向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以表為

$$\boldsymbol{A} = A_1\,\boldsymbol{a}_1 + A_2\,\boldsymbol{a}_2 + A_3\,\boldsymbol{a}_3 \quad 及 \quad \boldsymbol{B} = B_1\,\boldsymbol{a}_1 + B_2\,\boldsymbol{a}_2 + B_3\,\boldsymbol{a}_3$$

計算其內積與外積可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \left(A_1\,\boldsymbol{a}_1 + A_2\,\boldsymbol{a}_2 + A_3\,\boldsymbol{a}_3\right)\cdot\left(B_1\,\boldsymbol{a}_1 + B_2\,\boldsymbol{a}_2 + B_3\,\boldsymbol{a}_3\right)\\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= \left(A_1\,\boldsymbol{a}_1 + A_2\,\boldsymbol{a}_2 + A_3\,\boldsymbol{a}_3\right)\times\left(B_1\,\boldsymbol{a}_1 + B_2\,\boldsymbol{a}_2 + B_3\,\boldsymbol{a}_3\right)\\ &= \left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\cdot\boldsymbol{a}_1 + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\cdot\boldsymbol{a}_2 + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\cdot\boldsymbol{a}_3\end{aligned} \tag{19}$$

其中(19)式的外積還可以表為如下之行列式：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \tag{20}$$

求算此行列式時，請自第一列降階。此外，由(18)式可得 $A^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ ，即

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{21}$$

故向量的大小可以利用其在各基底向量之分量來求算。

數值型三重積 $\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)$

首先將 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三個向量表為 $\boldsymbol{A} = A_1\,\boldsymbol{a}_1 + A_2\,\boldsymbol{a}_2 + A_3\,\boldsymbol{a}_3$ ，$\boldsymbol{B} = B_1\,\boldsymbol{a}_1 + B_2\,\boldsymbol{a}_2 + B_3\,\boldsymbol{a}_3$ 及 $\boldsymbol{C} = C_1\,\boldsymbol{a}_1 + C_2\,\boldsymbol{a}_2 + C_3\,\boldsymbol{a}_3$ ，其中 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 為滿足(17)式之正交基底向量，利用(18)及(19)兩式，可得數值型三重積為

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right) = \begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} \tag{22}$$

由於行列式值具有下列的特性：

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{23}$$

參照(22)式，可得如下之關係式：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{24}$$

事實上，還可以將 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的絕對值視為由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三個向量所構成的平行六面體之體積，如圖 8 所示，底面積為 $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$，高則是向量 $\boldsymbol{A}$ 在底面法向量 $\boldsymbol{a}_{B\times C}$ 上之投影量。

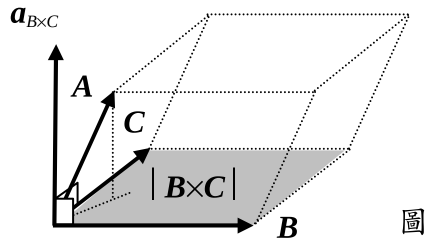

圖 8

向量型三重積 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

向量型三重積 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的運算較為複雜，其結果通常以 BAC–CAB 法則來描述，刻意將其表示為

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{25}$$

即將等號右邊各項排列成 BAC–CAB 形式，注意中間的橫線代表減號，底下證明此法則：

根據向量外積的定義可知三重積 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 的運算結果是一個與 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 垂直的向量，由於 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 兩向量也分別與 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 垂直，因此 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 必須位在 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所構成的平面上，換句話說

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C} \tag{26}$$

將此式與 $\boldsymbol{A}$ 做內積運算後，可得

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})) = 0 = \alpha(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) + \beta(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{27}$$

顯然地，兩係數 α 和 β 的比值為 $\alpha:\beta = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}):-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$，若是進一步將兩係數設為 $\alpha = k(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$ 與 $\beta = -k(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$，則代入(E2.2a)式後可得

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = k(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})) \tag{28}$$

由於此式適用於任意向量，可以令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 滿足(17)式，將此三向量代入(E2.2c)式後可得 $-\boldsymbol{a}_2 = -k\boldsymbol{a}_2$，故 k=1，亦即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{29}$$

故得證。

向量內積與外積說明至此。