求解三次方程式—卡當公式

考慮如下之三次方程式：

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

首先令 $x=y-(a/3)$，則上式改為

$$(y-(a/3))^3+a(y-(a/3))^2+b(y-(a/3))+c=0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad y^3+(b-a^2/3)y=-(2a^3/27-ab/3+c) \qquad (3)$$

再令 $p=b-a^2/3$，$q=-(2a^3/27-ab/3+c)$，則(3)式可寫為

$$y^3+py=q \qquad (4)$$

換句話說，任意三次方程式都能經由 $x=y-(a/3)$ 的變數轉換後，改寫成上式，若是令

$$f(y)=y^3+py-q \qquad (5)$$

則由多項式的特性可知 $f(y)=y^3+py-q=0$ 可能具有一個實數解，或三個實數解，也就是說(4)式的實數解可以是一個或三個，那麼何時具有三個實數解？根據微積分可知，須存在兩個 y_1 及 y_2，使得 $f'(y_1)=f'(y_2)=0$ 且 $f(y_1)\cdot f(y_2)<0$，換句話說，$f'(y)=3y^2+p=0$ 必須有兩個根，顯然地，p 必須小於 0，因而求得 $y_1=-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}$ 及 $y_2=\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}$，使得

$$\begin{aligned} f(y_1)\cdot f(y_2) &= \left(-\left|\frac{p}{3}\right|\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}-p\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}-q\right)\cdot\left(\left|\frac{p}{3}\right|\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}+p\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}-q\right) \\ &= -\left(\left|\frac{p}{3}\right|\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}+p\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}\right)^2+q^2 \qquad (6) \\ &= q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0 \end{aligned}$$

事實上，$q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 亦代表 $p<0$，故當 $q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 時，(4)式具有三個實數

解，而當 $q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ 時，(4)式只具有一個實數解，底下即利用 $q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ 的正負值來求得在 $q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ 及 $q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 < 0$ 兩種情況下的實數解。

首先選一組方程式如下：

$$u^3-v^3=q \tag{7}$$

$$uv=p/3 \tag{8}$$

經整理後可為

$$\begin{aligned} u^3-v^3 &= (u-v)^3+3uv(u-v) \\ &= (u-v)^3+p(u-v)=q \end{aligned} \tag{9}$$

顯然地，當 y=u–v 時，(9)式可改寫為(4)式，即 $y^3+py=q$ ，換句話說，只要利用(7)式及(8)式求出 u 與 v，即可得(4)式的解 y=u–v。其解法如下：

將(5)乘上 v^3，則

$$(uv)^3-v^6=qv^3 \tag{10}$$

再利用(8)式可得

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3-v^6=qv^3 \tag{11}$$

即

$$\left(v^3\right)^2+q\left(v^3\right)-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \tag{12}$$

其根值的判別式為 $4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+q^2$ ，也就是說：

A. 當 $q^2+4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ 時，(12)式存在 v^3 的實數解

其解為

$$v^3=-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{13}$$

再由(7)式可得

$$u^3=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{14}$$

故

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{及} \quad u=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{15}$$

所以

$$\begin{aligned}
y&=u-v\\
&=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\
&=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}\\[2ex]\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}\end{cases}\\
&=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\[2ex]\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}\end{cases}\\
&=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}
\end{aligned} \tag{16}$$

此為(4)式之實數解，且只有一個實數解，符合(5)式底下關於實數解個數之說明，進一步利用因式分解，可繼續求得其餘兩個複數解。

B. 當 $q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 時，(12)式不存在 v^3 的實數解

其複數解為

$$v^3=-\frac{q}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3}=-\frac{q}{2}\pm j\sqrt{-\left[\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} \quad (17)$$

由於 $q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 亦代表 p<0，所以上式可以進一步表為

$$v^3=\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|^3}e^{\pm j3\theta} \quad (18)$$

亦即

$$v=\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\theta},\ \sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)},\ \sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)} \quad (19)$$

其中 $cos(3\theta)=-\frac{q}{2}\Big/\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|^3}$，再由(8)式可得相對應的

$$u=-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\theta},\ -\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)},\ -\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)} \quad (20)$$

顯然地 $y=u-v$ 有 6 種可能的組合方式，歸納後成為下列 3 組解：

<1> $$y=-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\theta}-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\theta}=-2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}cos\,\theta$$

<2> $$y=-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)}=-2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$$

<3> $$y=-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\mp j\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)}-\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}e^{\pm j\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)}=-2\sqrt{\left|\frac{p}{3}\right|}cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)$$

顯然地，(4)式有三個實數解，符合 $q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 時之特性。

$\boxed{\text{範例 1}}$

求解 $x^3-6x^2+11x-6=0$ (解為：1, 2, 3)

Sol:

首先令 $x=y+2$，則 $p=-1$，$q=0$，上式改為

$$y^3-y=0$$

首先選一組方程式如下：

$$u^3-v^3=0$$

$$uv=-1/3$$

經整理後可為

$$\left(v^3\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3=0$$

其根值的判別式為 $4\left(\frac{p}{3}\right)^3+q^2=-\frac{4}{27}<0$，也就是說不存在 v^3 的實數解

其複數解為

$$v^3=\pm j\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}e^{\pm j90^\circ}$$

亦即 $\theta=30^\circ$，所以

$$v=\sqrt{\frac{1}{3}}e^{\pm j30^\circ},\ \sqrt{\frac{1}{3}}e^{\pm j150^\circ},\ \sqrt{\frac{1}{3}}e^{\pm j270^\circ}$$

使得

<1> $y=-2\sqrt{\frac{1}{3}}cos30^\circ=-2\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-1$，$x=y+2=1$

<2> $y=-2\sqrt{\frac{1}{3}}cos150^\circ=-2\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1$，$x=y+2=3$

<3> $y=-2\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot cos270^\circ=0$，$x=y+2=2$

故 $x=1, 2, 3$。

$\boxed{範例 2}$

求解 $x^3-3x^2+4x-2=0$ (解為：1, 1±j)

Sol:

首先令 $x=y+1$，則 $p=1$，$q=0$，上式改為

$$y^3+y=0$$

首先選一組方程式如下：

$$u^3-v^3=0$$

$$uv=1/3$$

經整理後可為

$$\left(v^3\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3=0$$

其根值的判別式為 $4\left(\frac{p}{3}\right)^3+q^2=\frac{4}{27}>0$，也就是說存在 v^3 的實數解，其解為

$$y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=0$$

所以經由分解因式可得

$$y^3+y=y\left(y^2+1\right)=0$$

故 $x=y+1=1,1\pm j$。