阿基米德與球面積公式

陳永平 教授
國立交通大學電機系

人類的科學活動

- 觀察
  - 天文(曆法/星象/日蝕/月蝕/潮汐)
  - 自然(伽利略[擺錘運動]、牛頓[萬有引力])
  - 實驗(奥尼斯[超導體]、法拉第[電磁感應])
  - 數學(麥斯威爾[電磁波光速]、波德[小行星群])
- 假設(條件)
  - 牛頓力學(慣性系統)
  - 愛因斯坦相對論(光速不變)
  - 愛因斯坦的挫敗(宇宙常數)[哈伯/宇宙膨脹論]
- 驗證
  - 庫倫(驗證靜電力公式)[普里斯利未完成]
  - 赫茲(驗證電磁波的存在)

挑戰題一

以地球與太陽之距離一億五千萬公里為1天文單位

德國天文學家波德(Bode)於1772年發現

行星與太陽間距離的約為(天文單位)：

水星(0.4) 金星(0.7) 地球(1) 火星(1.6)

木星(5.2) 土星(10) 天王星(19.6)

存在一個關係式：

行星與太陽間之距離(天文單位)

＝（行星基數＋4）/10

請計算出各行星之行星基數。

並觀察出缺了那個行星基數？

若該行星存在，應距離太陽多遠？

科學發展之工具

- 數學
  - 展示人類的智慧
- 物理/化學
  - 發現上帝的傑作
- 工程
  - 發揮人類的創意

從事科學活動之方法

1. 觀察/收集資料
2. 筆記/記錄事實，發掘疑點
3. 分析/自我挑戰，大哉問
4. 歸納/下結論
5. 記憶背誦/提升科學文化

物理大師—費曼的一盤棋

- 物理(化學)
  - 棋步規則
- 數學(工程)
  - 對局布局

不斷面對新局的挑戰

阿基米德的重要貢獻

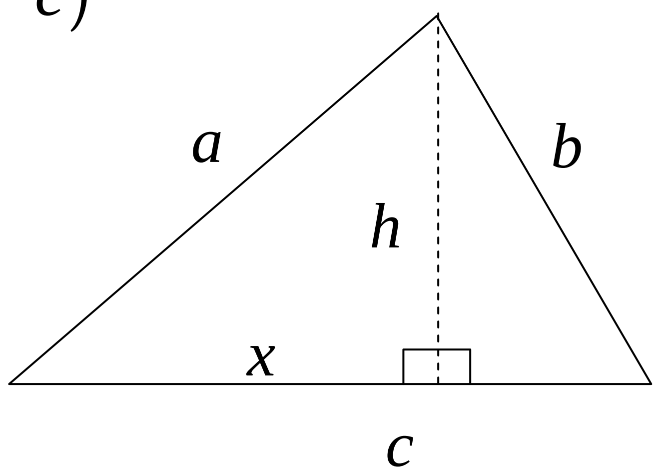
- 阿基米德原理(浮體原理)
- 槓桿原理
- 阿基米德水車
- 大型拋物面聚光器
- 圓面積、球面積、球體積公式
- 三角形面積之海龍公式
- ……………

挑戰題二

證明三角形面積A之海龍公式

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$



求算球面積之前置工作

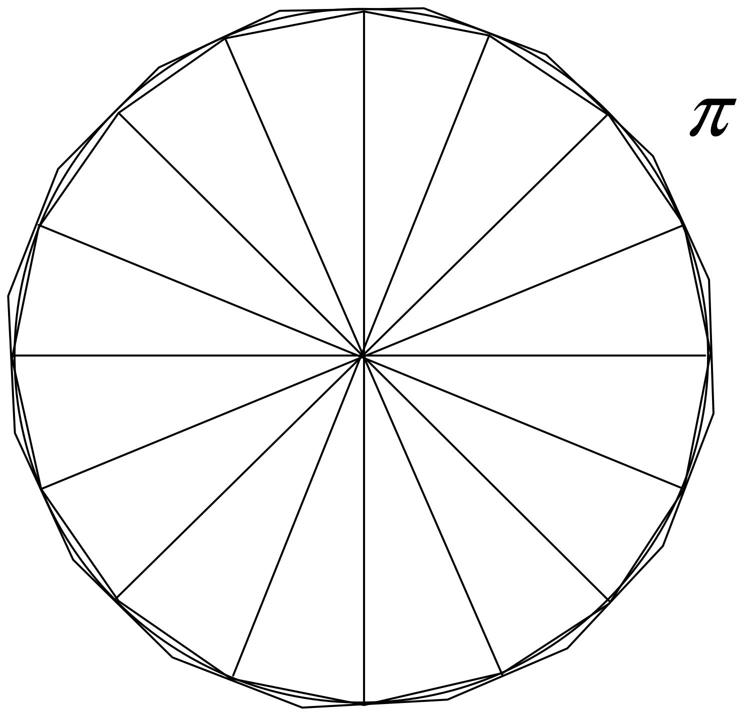
1. 圓周長 $S=2\pi r$
2. 圓面積 $A=\pi r^2$
3. 三角錐體積 $V=Ah/3$
4. 錐形體積 $V=Ah/3$
5. 球體積 $V=4\pi r^3/3$
6. 球面積 $A=4\pi r^2$

半徑	：r
周長	：S
面積	：A
高	：h
體積	：V

$\boxed{\text{現代—微積分}}$

1. 求算圓周長*S*

內接外切正多邊形切割逼近法



$\pi = 3.141592654....$

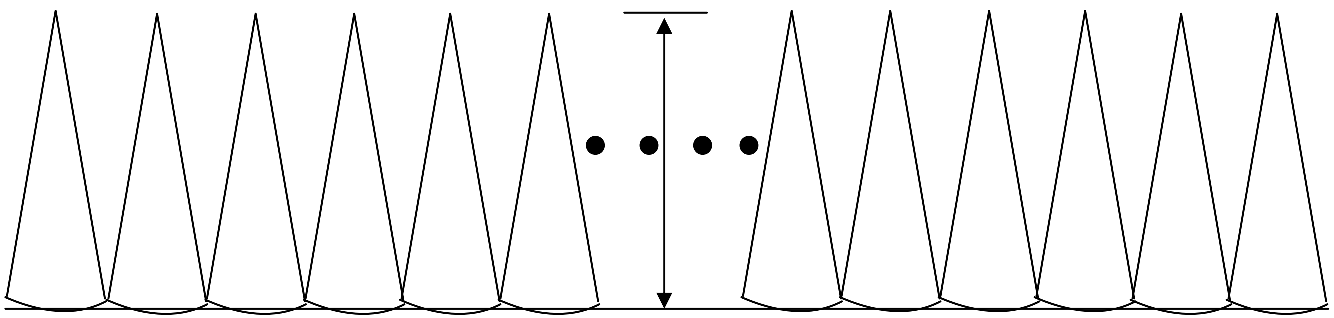
$$\pi = \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}}$$

$S = 2\pi r$

2. 求算圓面積*A*

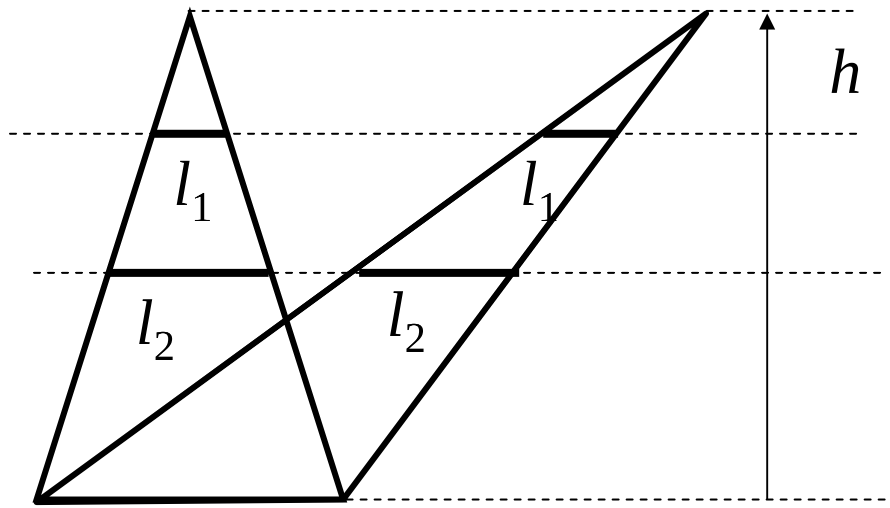
由圓心徑向無限切割後攤開

圓面積 = 底×高/2 = πr^2



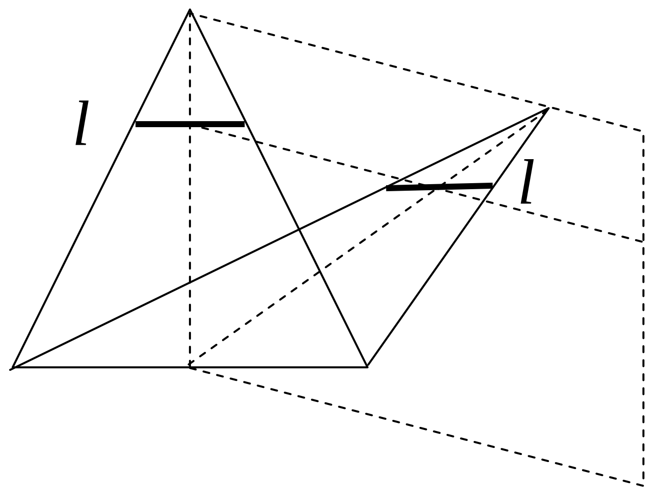
3. 求算三角錐體積*V*(1/6)

A. 底與高都相同的三角形面積都一樣



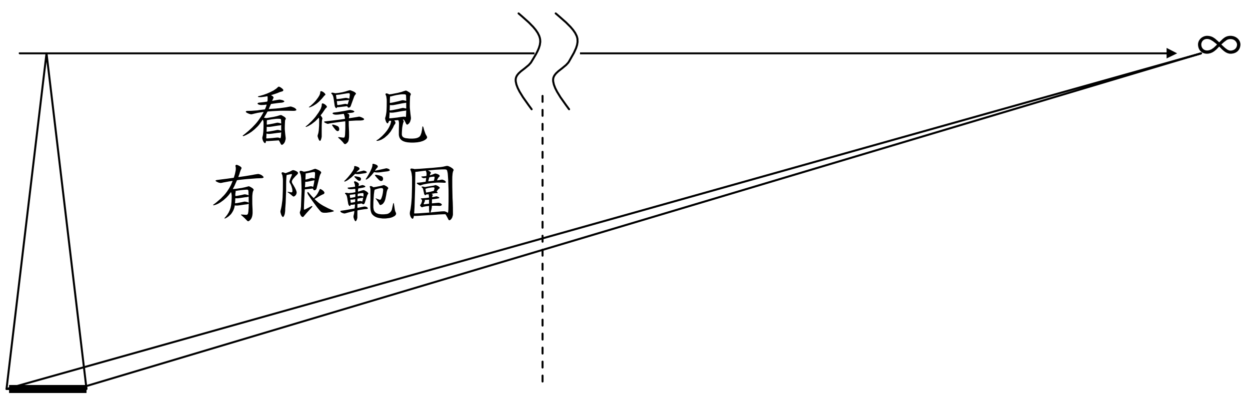
挑戰題三

前頁為平面拉扯，若立體拉扯，為何線段長*l*不變，但是面積卻不一樣



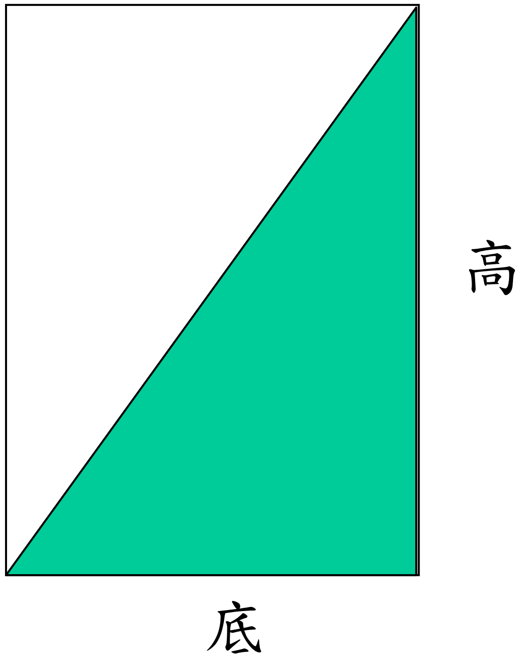
挑戰題四

若平面拉扯至無窮遠，則看得見的面積為多少？看不見的面積為多少？你所看到的是什麼圖形？



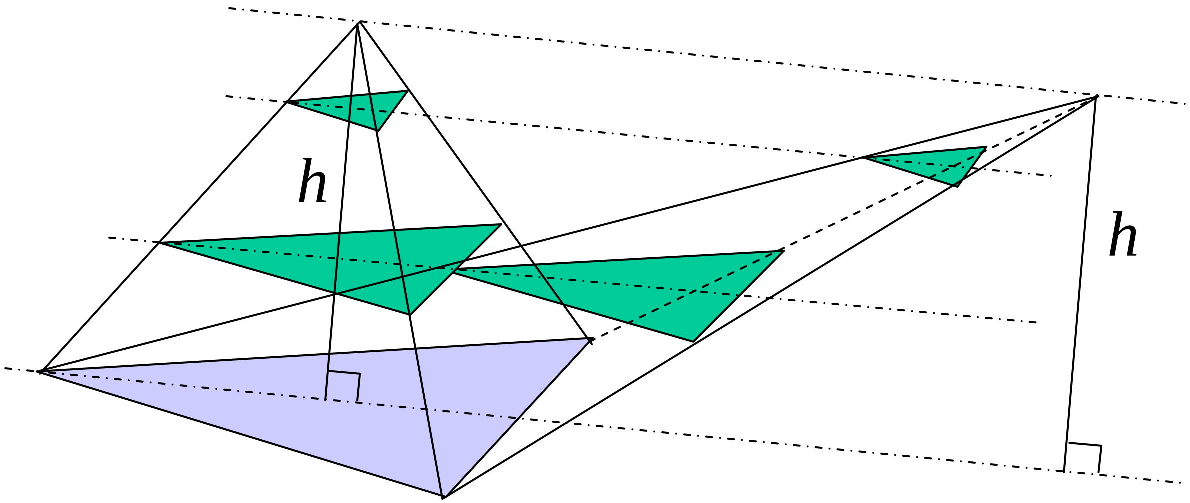
3. 求算三角錐體積V(2/6)

B. 三角形面積=長方形面積/2=底×高/2



3. 求算三角錐體積V(3/6)

C. 底面積與高(h)都相同的三角錐體積都一樣

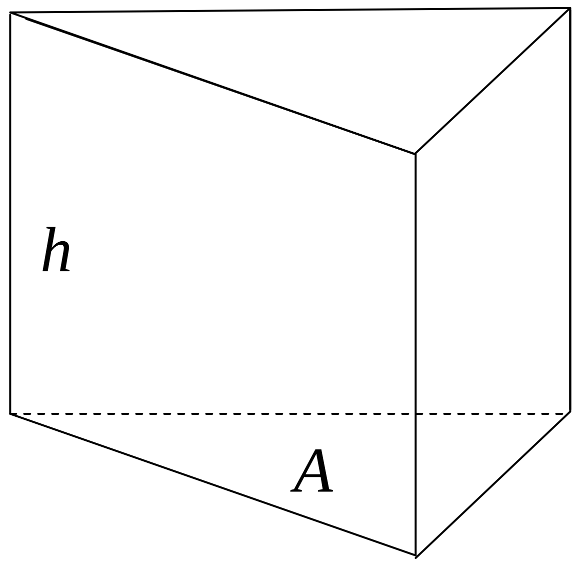


3. 求算三角錐體積V(4/6)

D. 三角柱體積

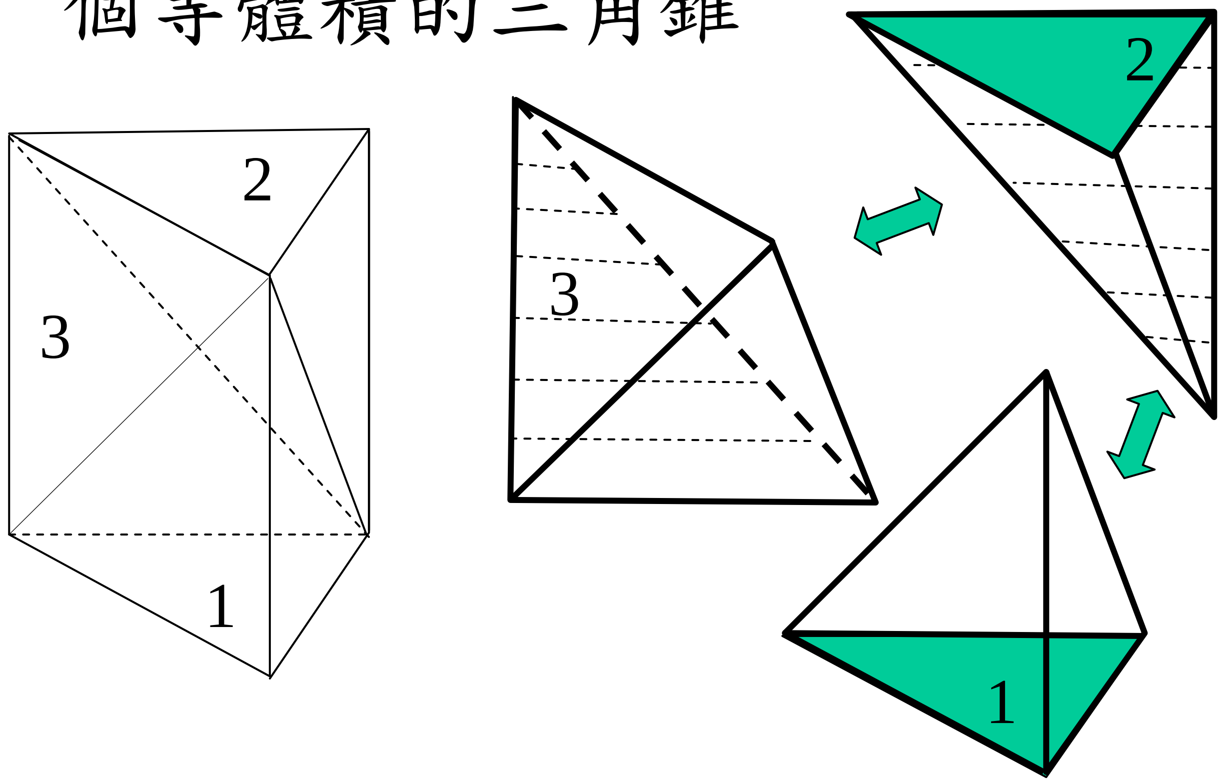
三角形底面積×高

$= A \times h$



3. 求算三角錐體積V(5/6)

E. 三角柱體積可以分割成三個等體積的三角錐

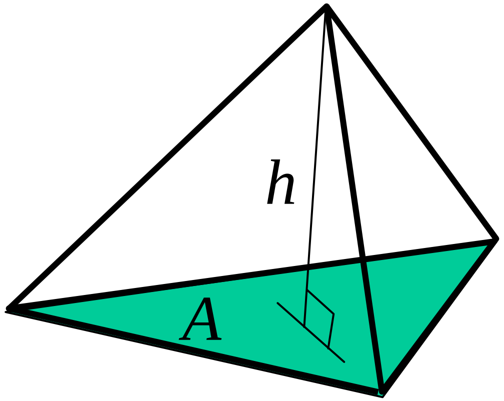


3.　求算三角錐體積V(6/6)

F. 三角錐體積

三角形底面積×高 / 3

$$= A \times h / 3$$



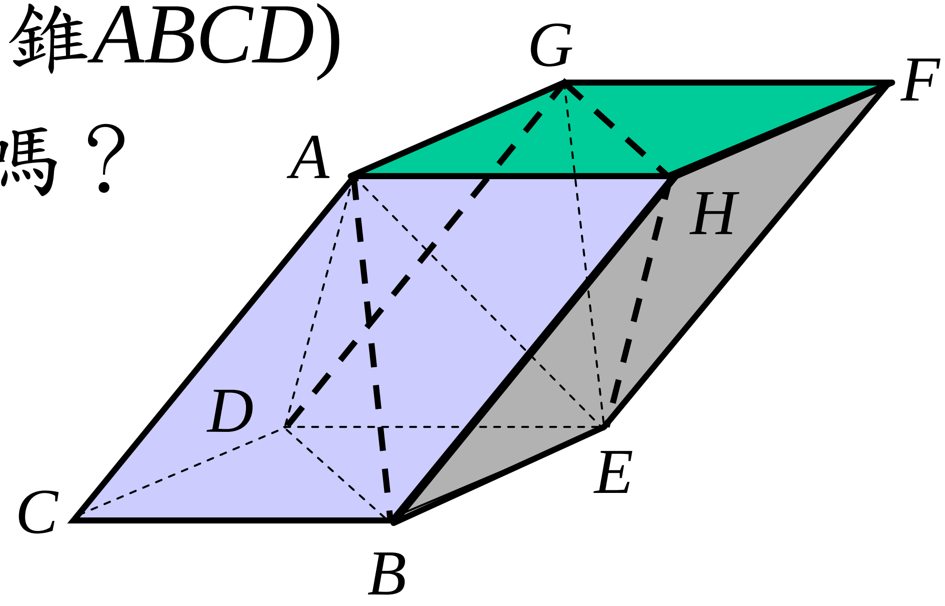
挑戰題五

三角錐$ABCD$為斜長方體體積的1/6

圖中有六個相同體積的三角錐

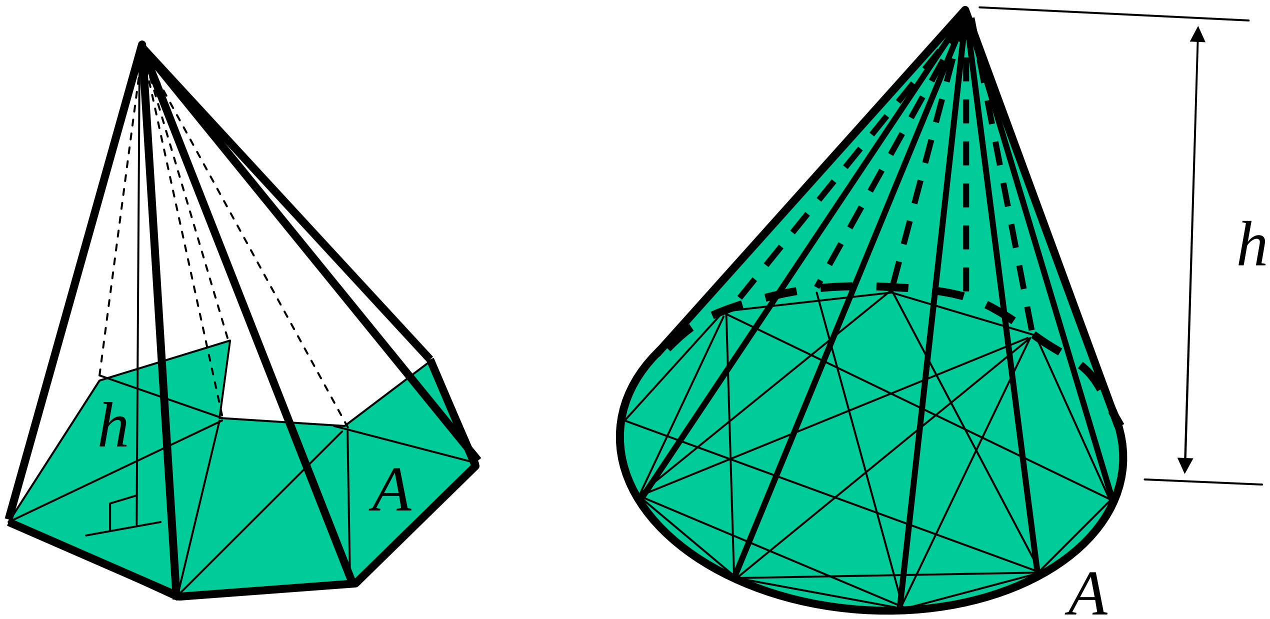
(包括三角錐$ABCD$)

你看到了嗎？



4. 求算錐形體積V

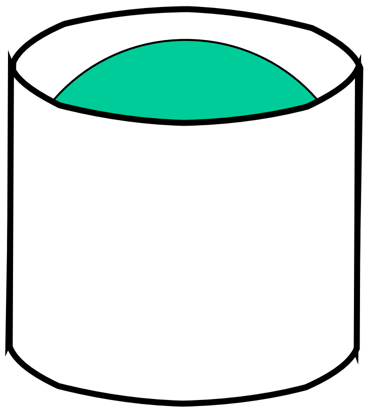
錐形體積 = 底面積×高 / 3 = $A \times h / 3$

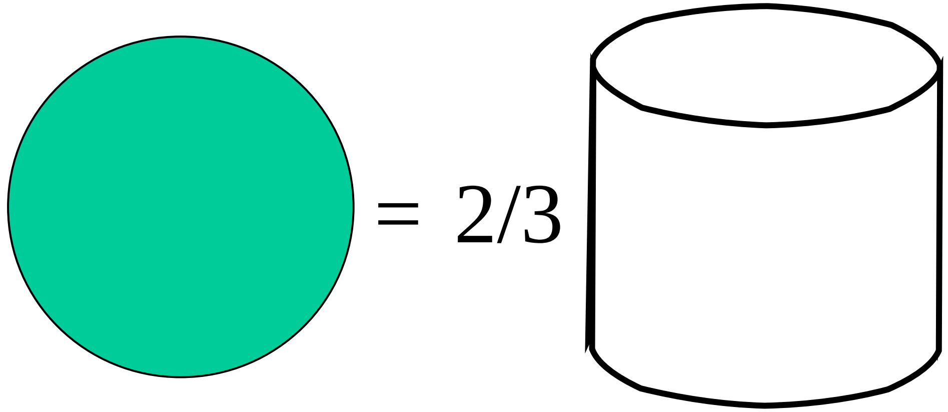


底面積細切成一堆小三角形

阿基米德的得意之作

- 球體積公式
  - 墓碑上的註記
  - 圓柱內切球體體積等於圓柱體積之2/3





5. 求算球體積V

運用

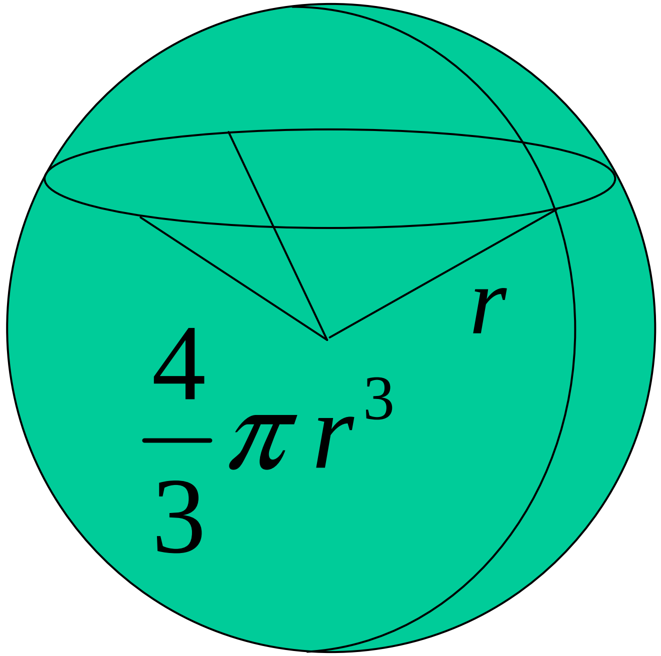
A. 半圓圓周角

B. 直角母子三角形

C. 槓桿原理

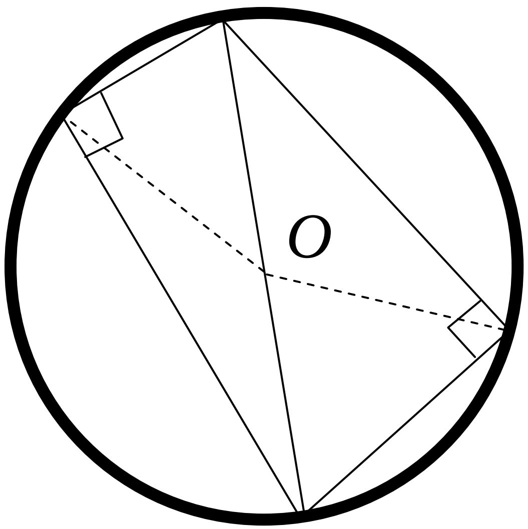
D. 重心

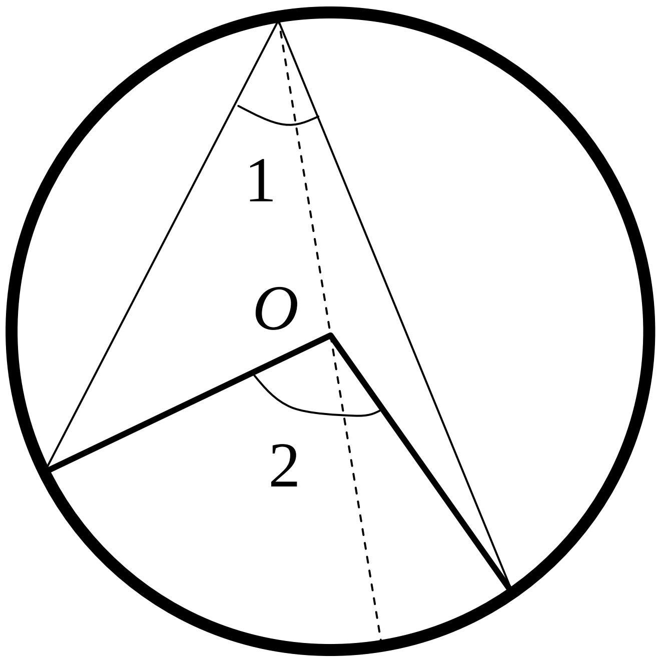
E. 阿基米德求算球體積(猜想)



5.A 半圓圓周角

- 圓周角
- 圓心角=2倍圓周角
- 半圓圓周角=90º





挑戰題六

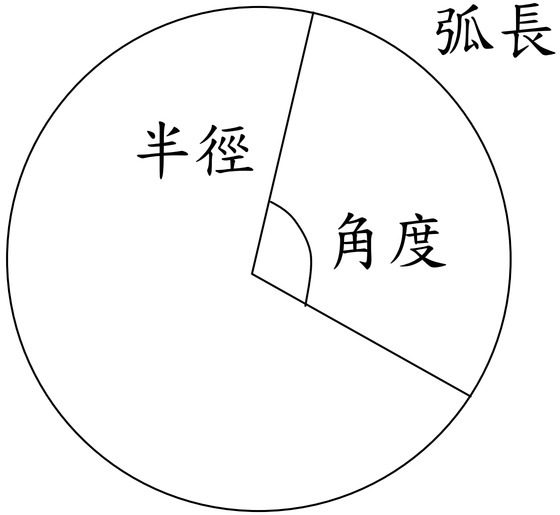
角度：徑度(radian, rad)

定義：徑度=弧長/半徑

根據此定義，

360º=？徑度

1徑度=？º

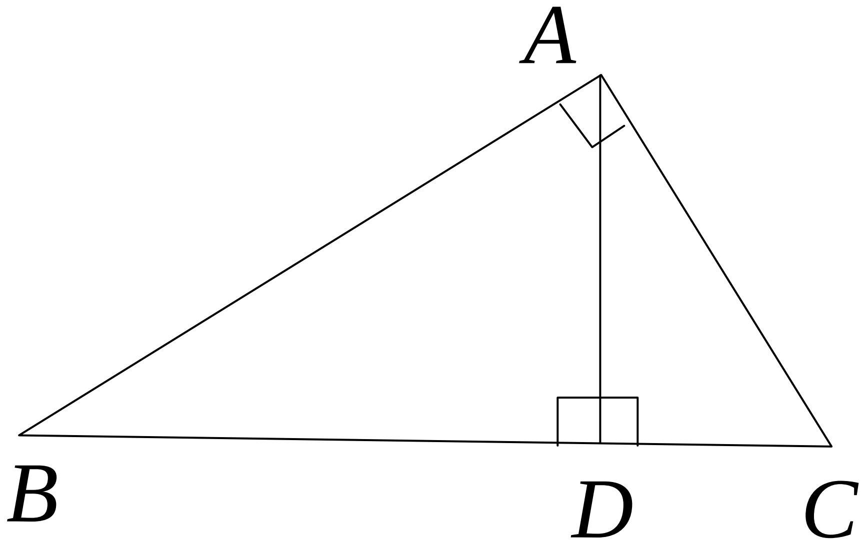


徑度的好處：計算弧長

弧長=半徑×徑度

註： 1海哩=地球大圓圓心角1分的弧長=1852公尺
1節=1海哩/小時

5.B 直角母子三角形



$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$$

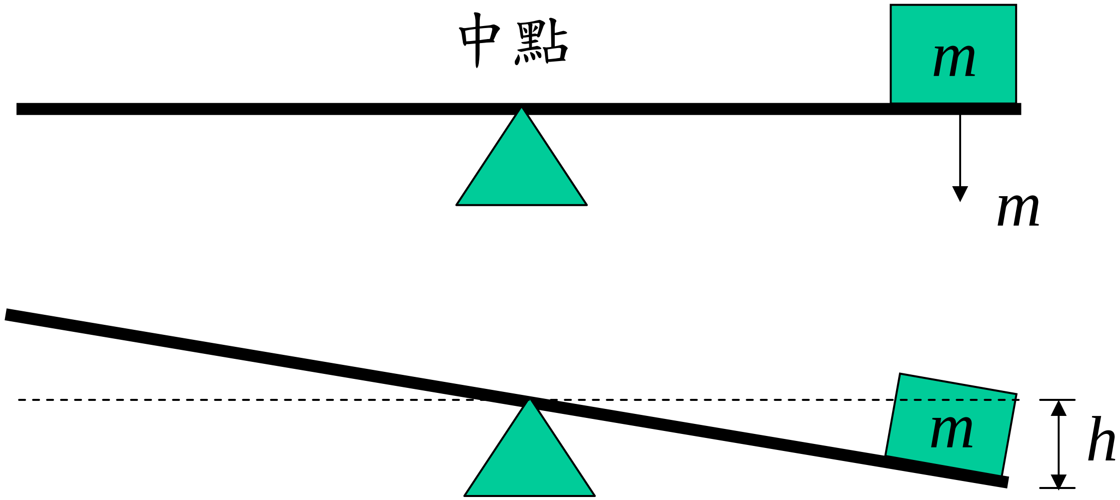
$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \left(\overline{BD} + \overline{DC}\right) \times \overline{BC} = \overline{BC}^2$$

(畢氏定理)

5.C 槓桿原理(1/7)

- 功＝力×位移

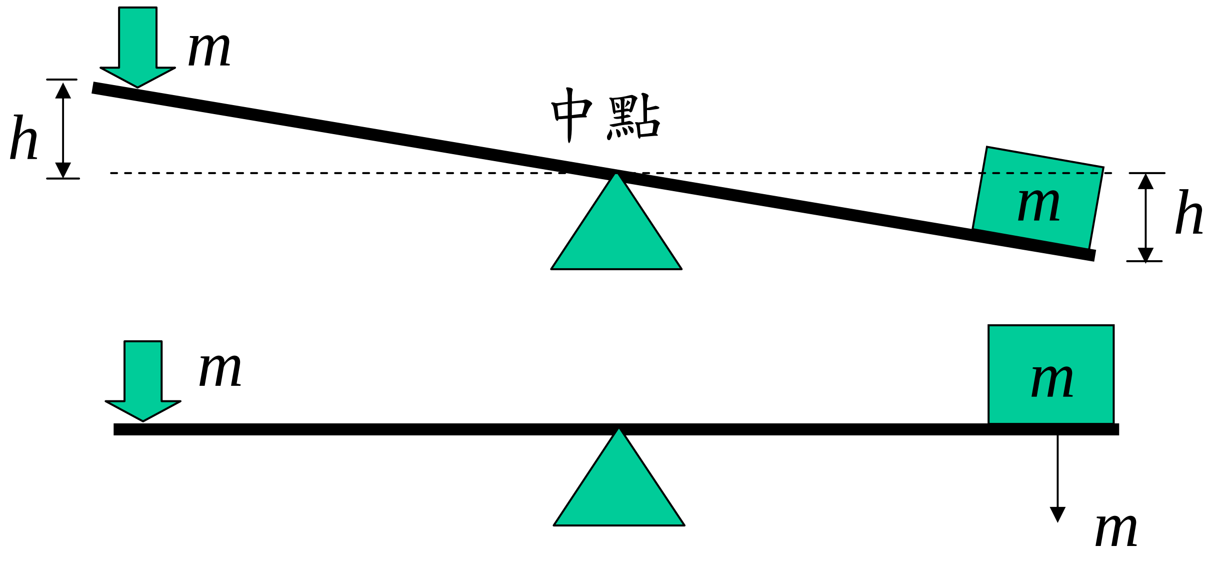


重力 m，位移 h，重力作功 $m \times h$

重力單位：gw或kgw
質量單位：g或kg

5.C 槓桿原理(2/7)

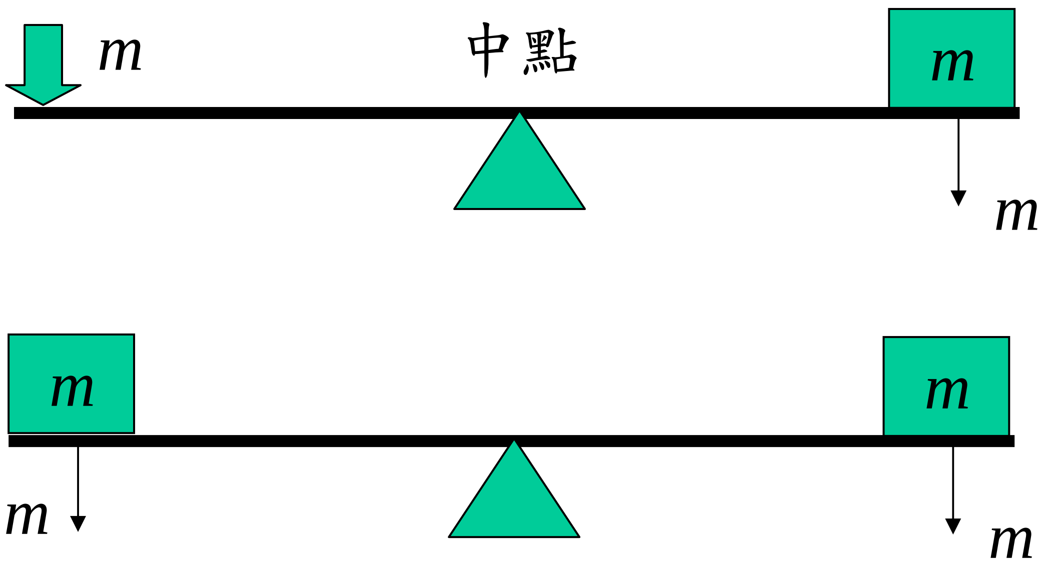
- 抵消重力作功=施力×位移



施力 m，位移 h，抵消重力作功 $m \times h$

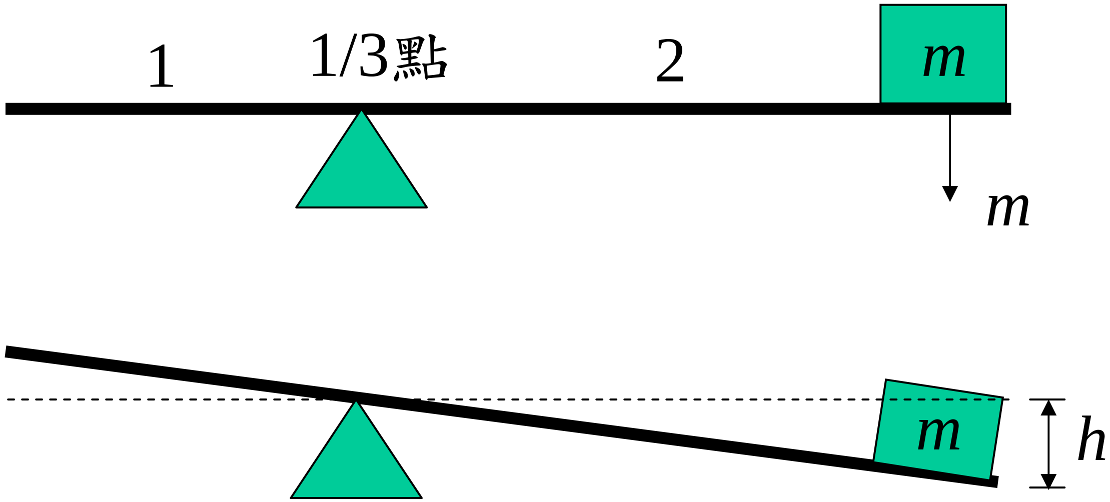
5.C 槓桿原理(3/7)

- 平衡



5.C 槓桿原理(4/7)

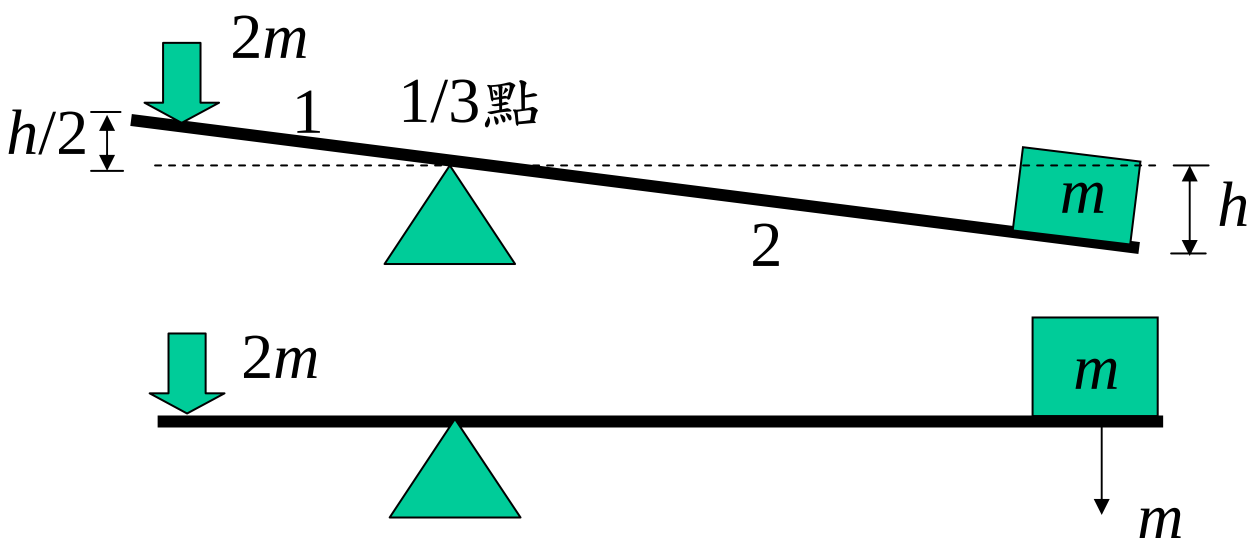
- 功＝力×位移



重力 m，位移 h，重力作功 $m \times h$

5.C 槓桿原理(5/7)

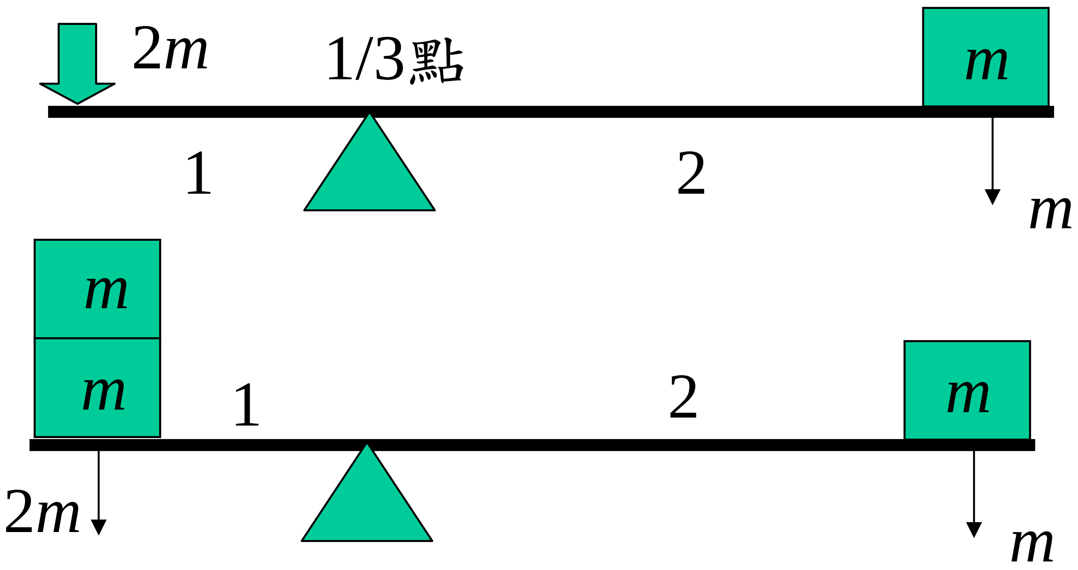
- 抵消重力作功=施力×位移



施力 2*m*，位移 *h*/2，抵消重力作功 $m \times h$

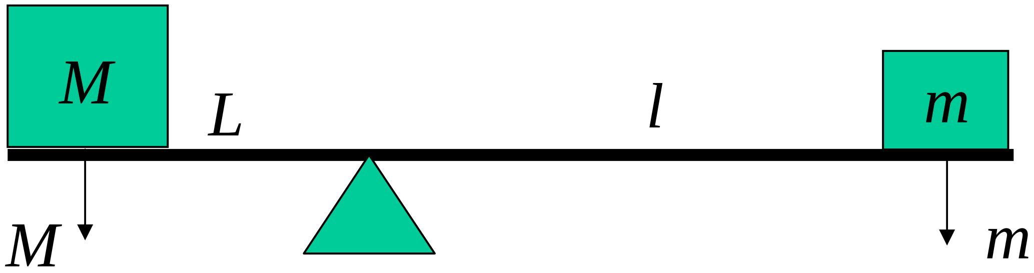
5.C 槓桿原理(6/7)

- 平衡



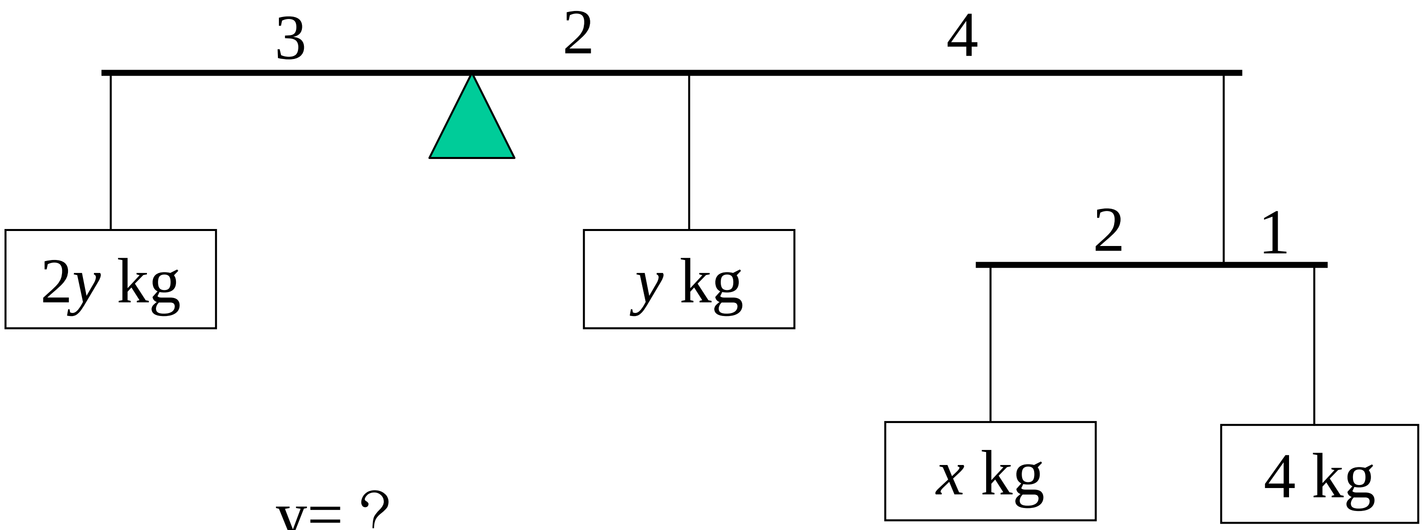
5.C 槓桿原理(7/7)

- 槓桿原理



$$M \times L = m \times l$$

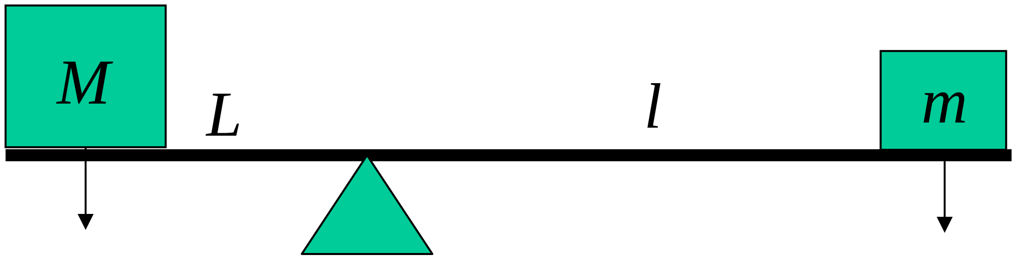
挑戰題七

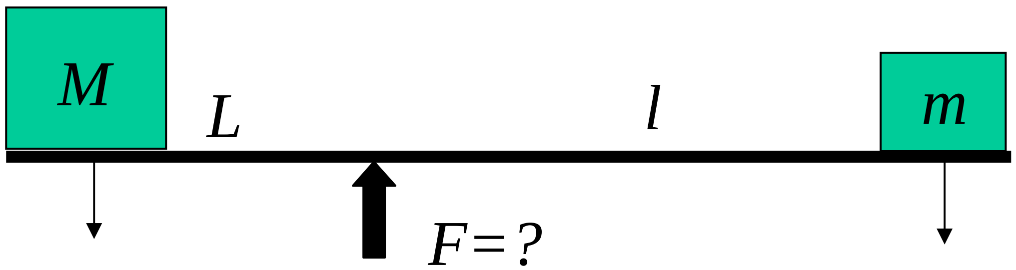


y=？

5.D 重心(1/5)

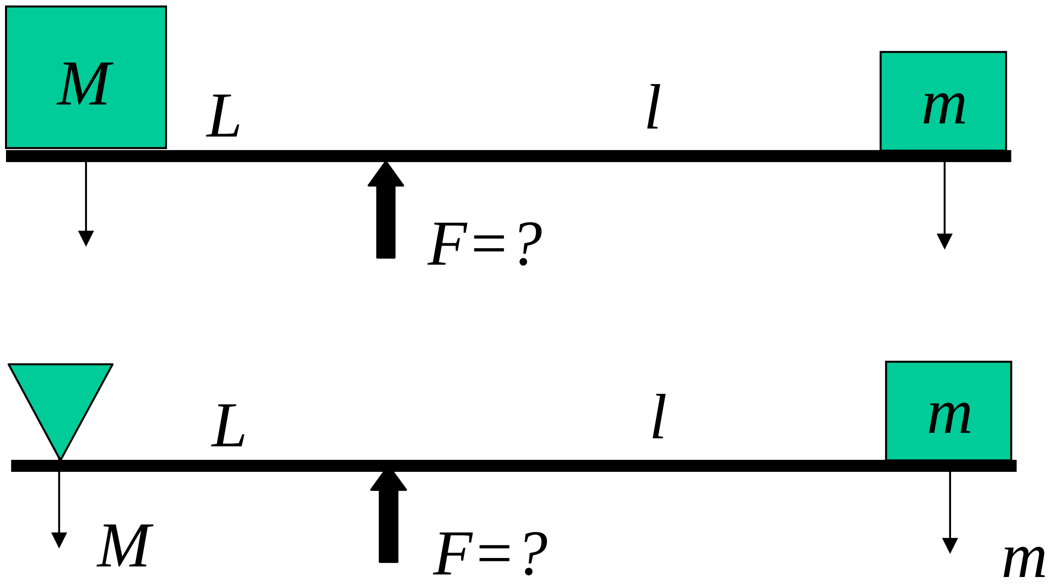
- 槓桿支點受力F





5.D 重心(2/5)

- 支點轉換至M



5.D 重心(3/5)

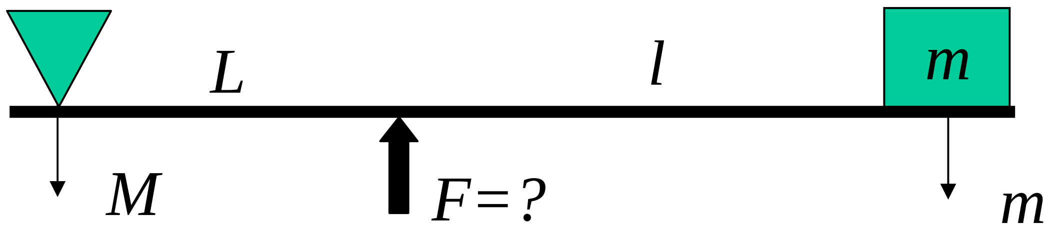
- 計算F

$$F \times L = m(l + L)$$

$$F = ml/L + m \qquad (ml = ML)$$

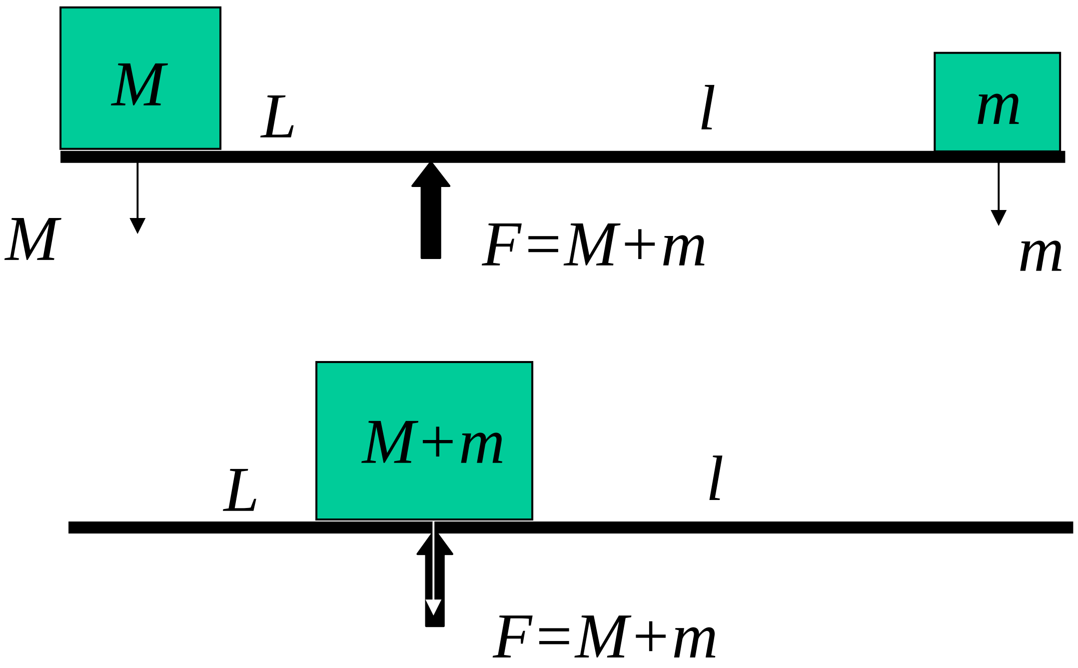
$$= ML/L + m$$

$$= M + m$$



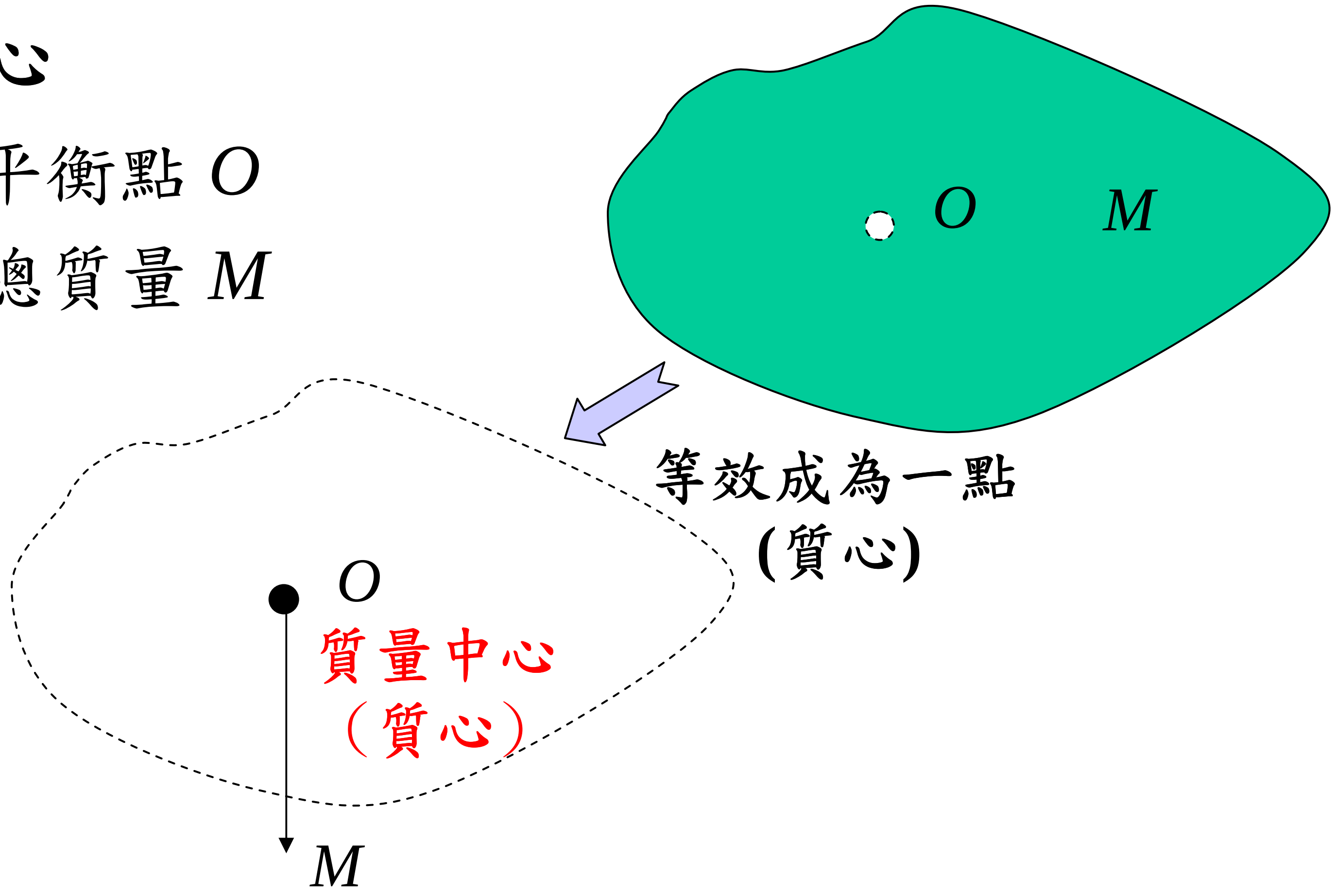
5.D 重心(4/5)

- 等效



5.D 重心(5/5)

- 重心
  - 平衡點 O
  - 總質量 M

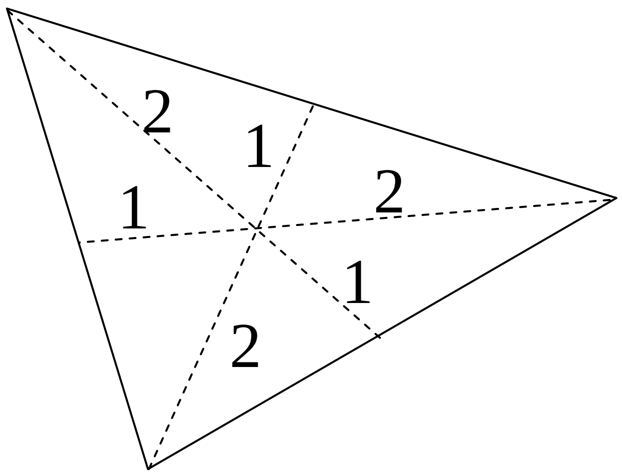


挑戰題八

請用平衡的概念說明：

三角形的重心在各中線的交點

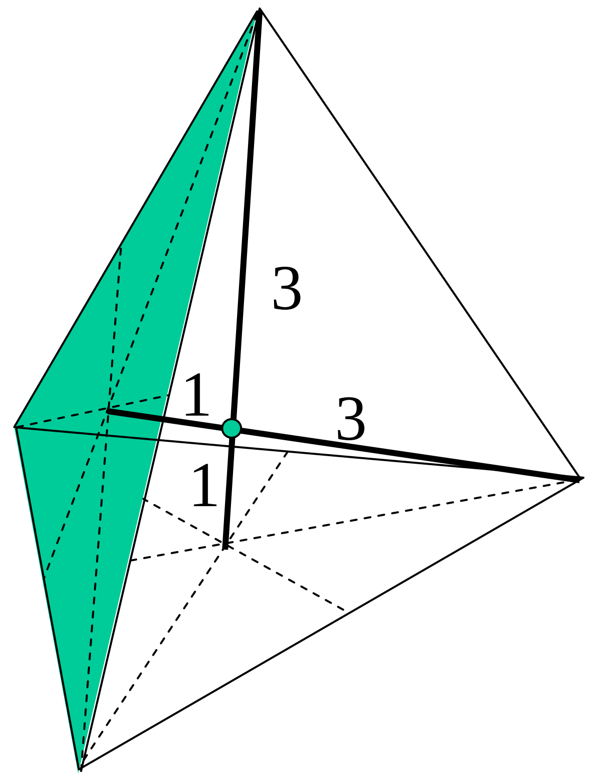
也正好在各中線的1/3處



挑戰題九

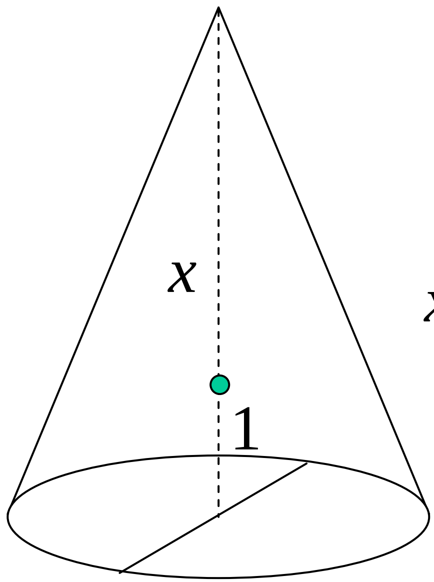
請用平衡的概念說明：

自三角錐的四頂點至其相對應面之三角形重心作四條連線，則四條連線的交點為三角錐之重心，此重心正好位在各連線的1/4處



挑戰題十

圓錐的重心在那裡？



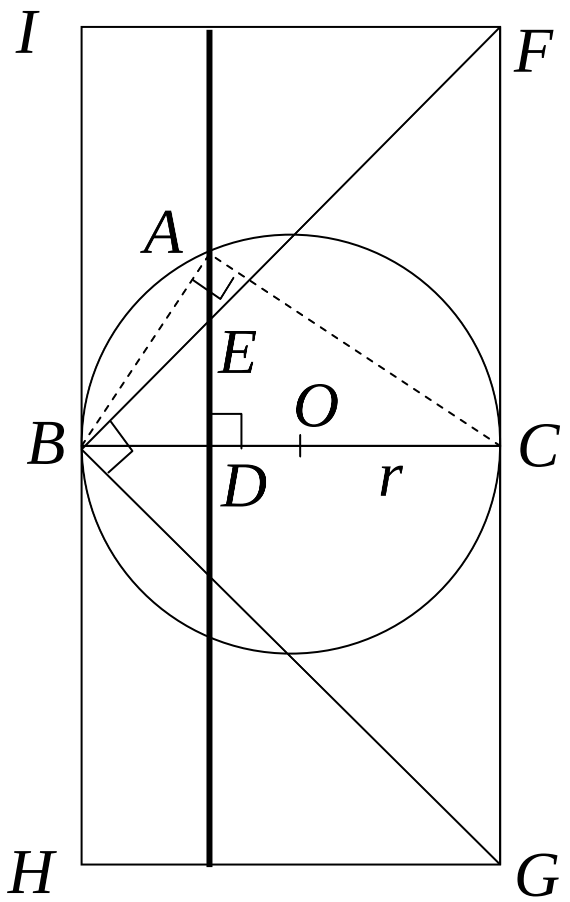
$x=?$

5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(1/7)

- 圓O，半徑$\overline{OB}=\overline{OC}=r$
- 等腰直角三角形ΔFBG

  高 $\overline{BC}=2r$ ，底 $\overline{FG}=4r$
- 長方形□$FGHI$

  長 $\overline{FG}=4r$ ，寬 $\overline{FI}=2r$



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(2/7)

- 以BC為軸，旋轉一週
- 圓O變成球O，半徑r

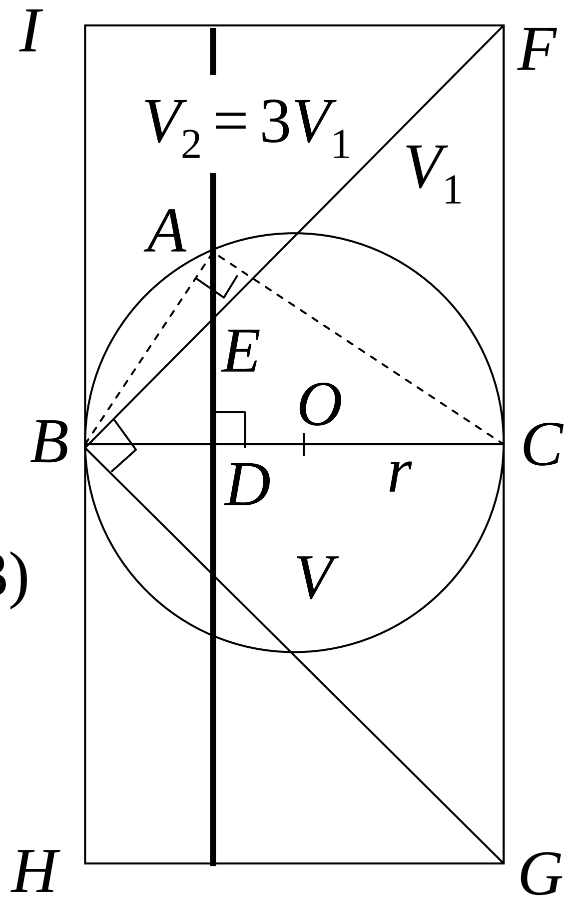
  體積V(未知，需計算)
- ΔFBG變成圓錐體

  底面積 $4\pi r^2$ ，高$2r$

  體積$V_1 = 8\pi r^3/3$ (圓柱體的1/3)
- □$FGHI$變成圓柱體

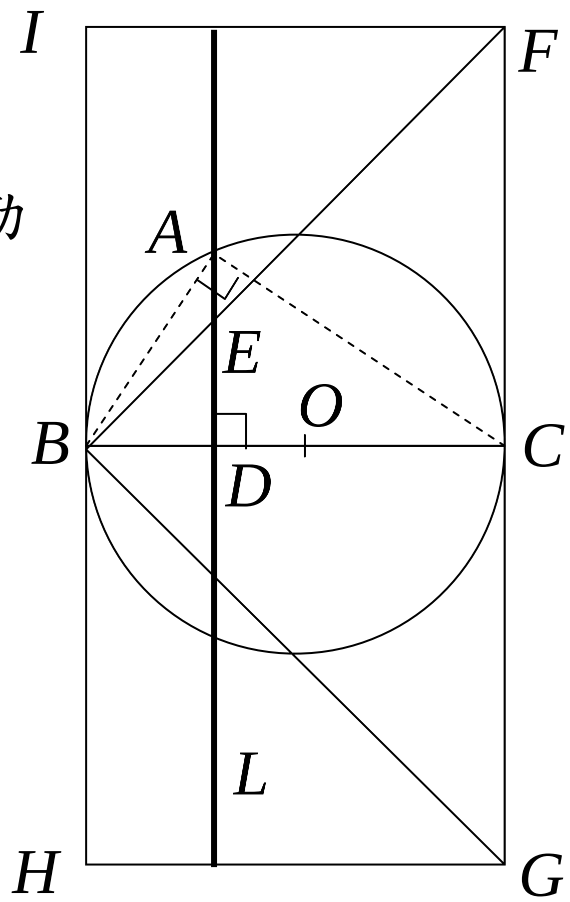
  底面積 $4\pi r^2$ ，高$2r$

  體積 $V_2 = 8\pi r^3 = 3V_1$



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(3/7)

- 以立體體積考慮
- 粗線L由B點出發，向右移動
  與直徑BC相交於D點，
  與圓O相交於A點，
  最後到達C點
- A、D兩點隨著L移動
  但是$\angle BAC$保持90º
  (半圓圓周角)



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(4/7)

- 由直角母子三角形

$$\boxed{\overline{AB}^2 = \overline{BD}\times\overline{BC} = \overline{DB}\times 2r}$$

$$\overline{AB}^2 = \boxed{\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2}$$

- 由等腰直角三角形 ΔFBG

$$\boxed{\overline{DE}} = \overline{DB}$$

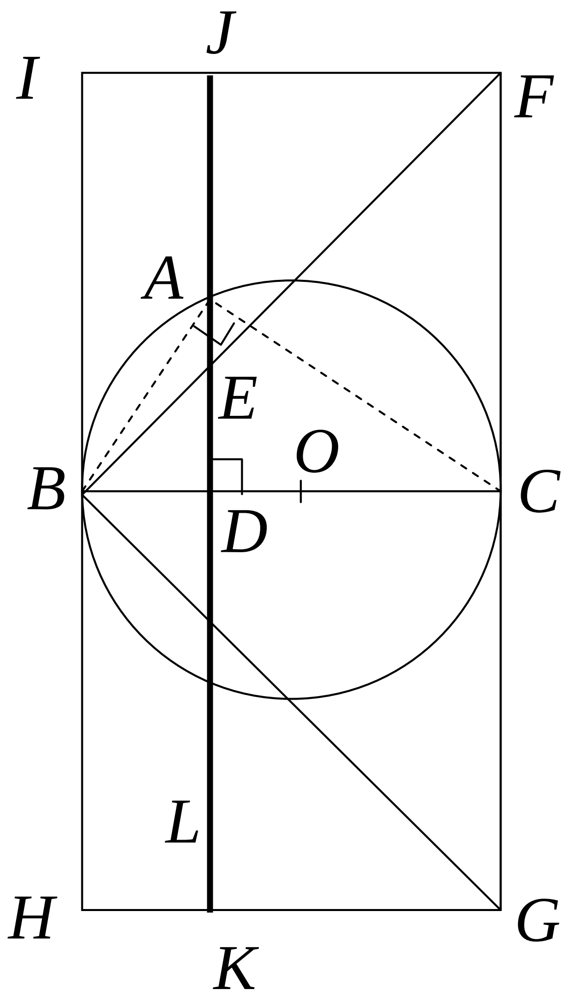
- 以上公式整理後

$$\boxed{\overline{DA}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{DB}\times 2r}$$

- 再同乘$2\pi r$

$$2r\left(\pi\overline{DA}^2 + \pi\overline{DE}^2\right)$$

$$= \overline{DB}\times\pi(2r)^2 = \overline{DB}\times\left(\pi\overline{DJ}^2\right)$$



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(5/7)

$$2r\left(\pi\overline{DA}^2+\pi\overline{DE}^2\right)=\overline{DB}\times\left(\pi\overline{DJ}^2\right)$$

槓桿原理之解釋[1]

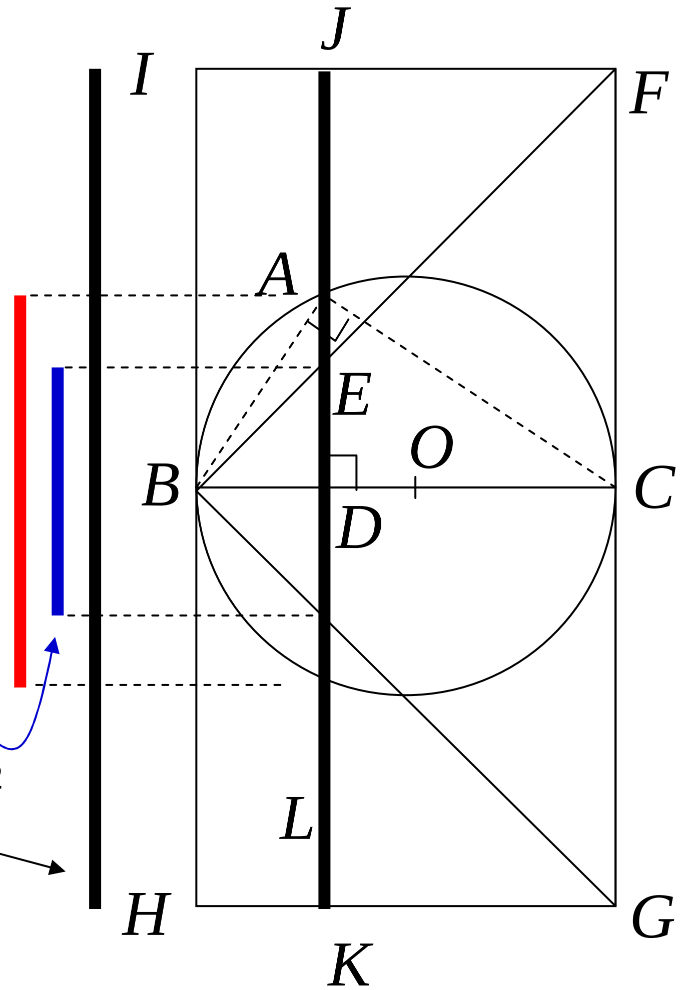
利用粗線L在球O、圓錐體FGB、圓柱體$FGHI$各切下薄薄的一片圓板

自球O切下圓板面積 $\pi\overline{DA}^2$

自圓錐體切下圓板面積 $\pi\overline{DE}^2$

自圓柱體切下圓板面積 $\pi\overline{DJ}^2$

三個圓板的重心都在D



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(6/7)

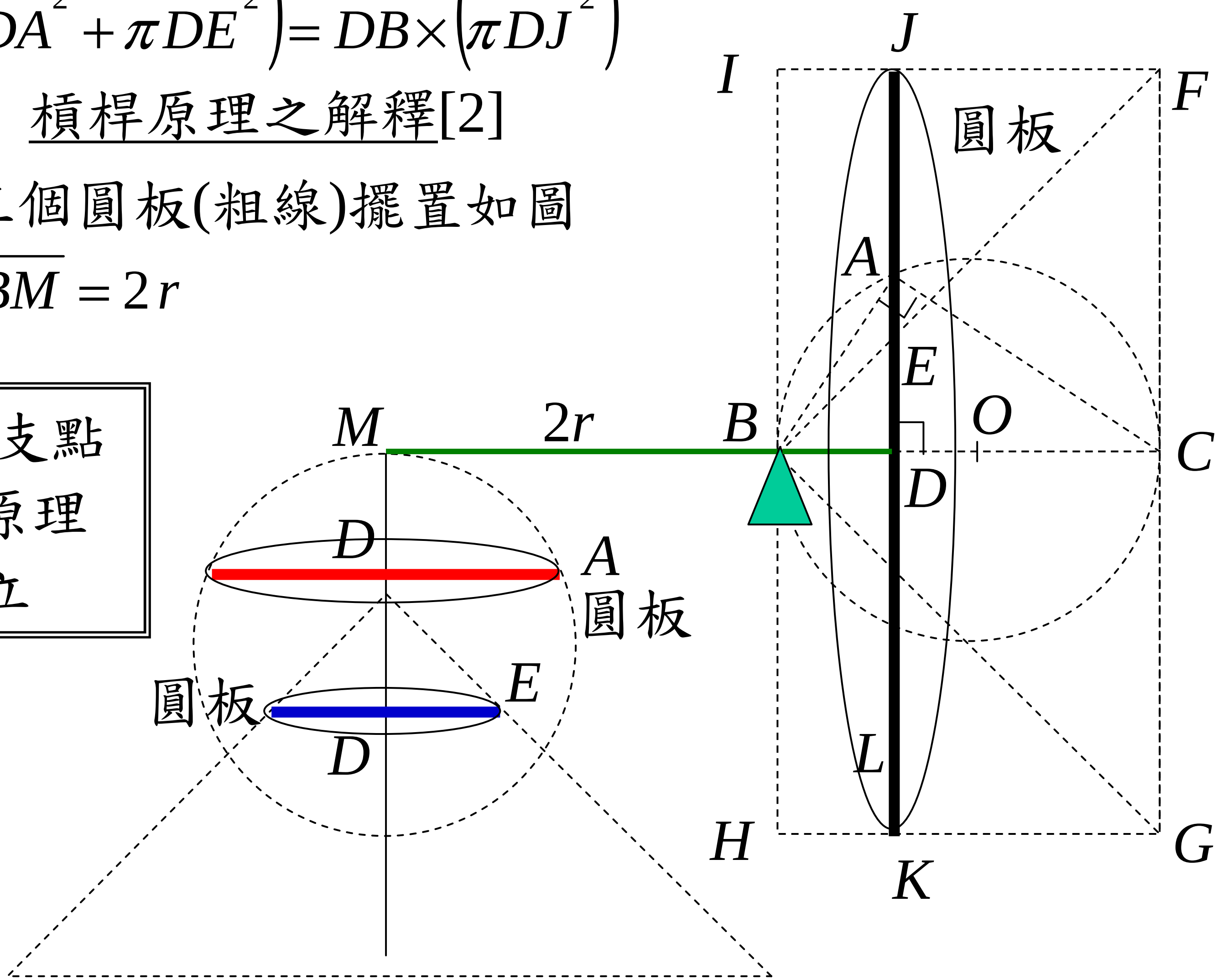
$$2r\left(\pi\overline{DA}^2+\pi\overline{DE}^2\right)=\overline{DB}\times\left(\pi\overline{DJ}^2\right)$$

<u>槓桿原理之解釋</u>[2]

將三個圓板(粗線)擺置如圖

$\overline{BM}=2r$

以B為支點
槓桿原理
成立



5.E 阿基米德計算球體積(猜想)(7/7)

$$2r\left(\pi\overline{DA}^2+\pi\overline{DE}^2\right)=\overline{DB}\times\left(\pi\overline{DJ}^2\right)$$

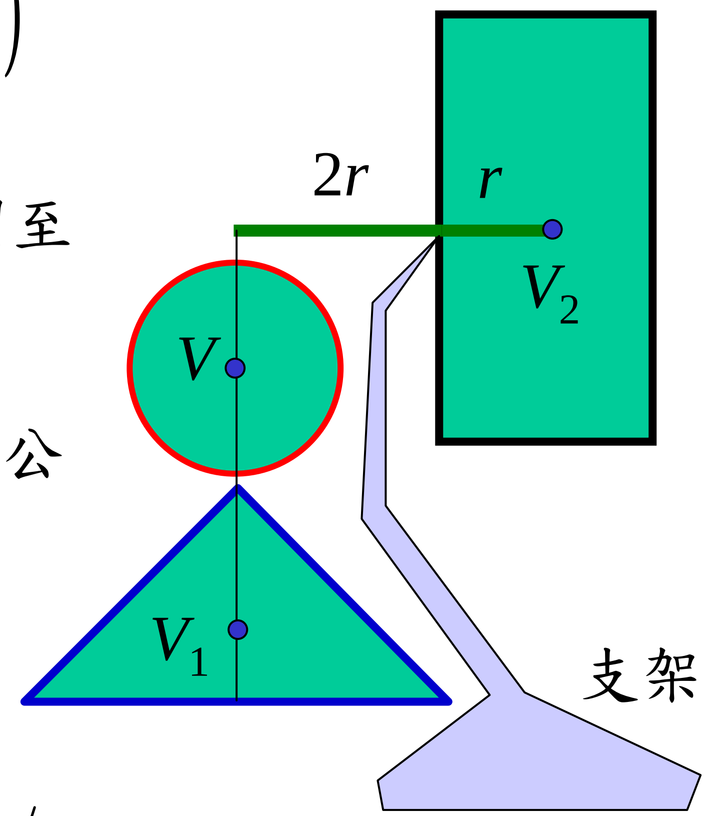
<u>槓桿原理之解釋</u>[3]

上頁中粗線L由B點開始切割至C點，支點不變，上式都成立，故可將三個體積擺置如圖，並利用槓桿原理，得到公式 $(V+V_1)\times 2r=V_2\times r$

$$\Rightarrow\ (V+V_1)\times 2=V_2\ \ (V_2=3V_1)$$

$$\Rightarrow\ 2V=V_1$$

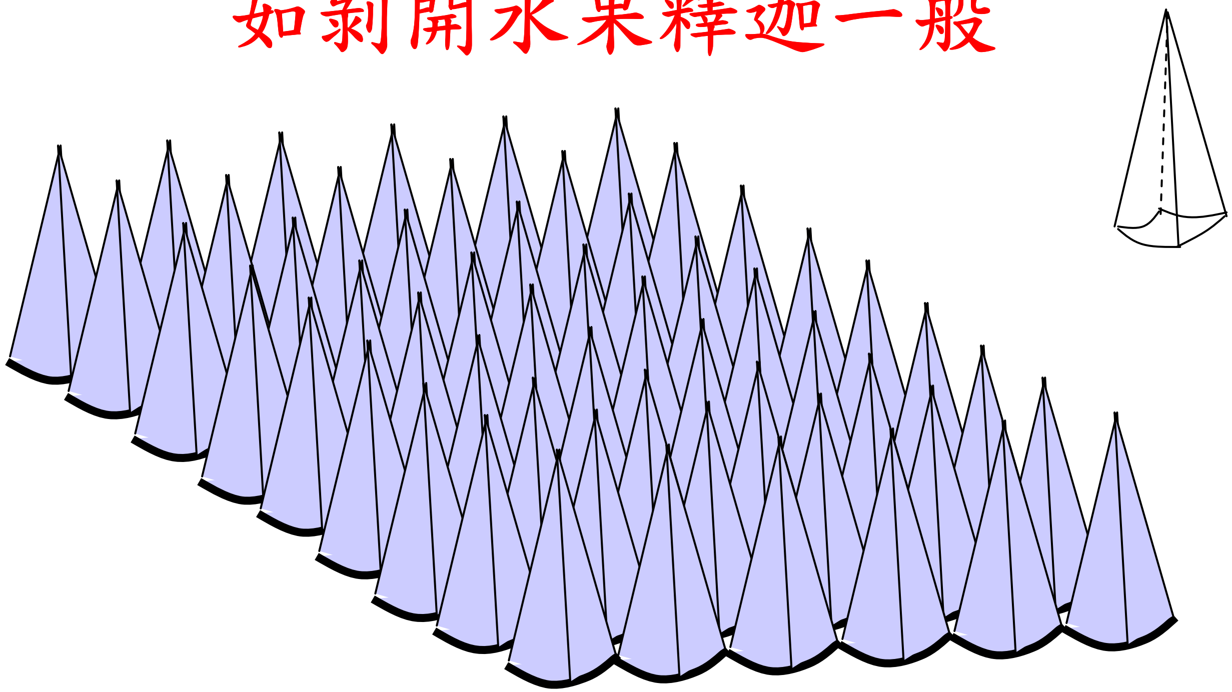
$$\Rightarrow\ V=V_1/2=\left[\frac{1}{3}\left(\pi(2r)^2\right)(2r)\right]\Big/2=\frac{4}{3}\pi r^3$$



6. 求算球面積*A*(1/3)

由球心徑向切割後，再攤開

如剝開水果釋迦一般



6. 求算球面積*A*(2/3)

由球心徑向做無限小錐狀體切割

一塊塊錐狀體高都等於球的半徑*r*

全部底面積等於球面積

$\boxed{\text{球體積}} = \boxed{\text{全部錐體體積}}$

$\boxed{\text{全部錐體體積}} = \boxed{\text{全部底面積}} \times \text{高}/3$

$\boxed{\text{全部底面積}} = \boxed{\text{球面積}}$

6. 求算球面積A(3/3)

$\boxed{\text{球體積}} = 4\pi r^3/3 = \boxed{\text{全部錐體體積}}$

$\boxed{\text{全部錐體體積}} = \boxed{\text{球面積}}\times\text{高}/3$

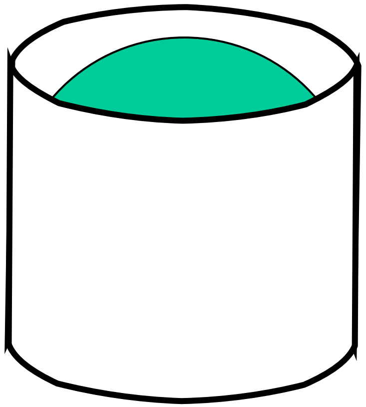
$4\pi r^3/3 = \boxed{\text{球面積}}\times r\ /3$

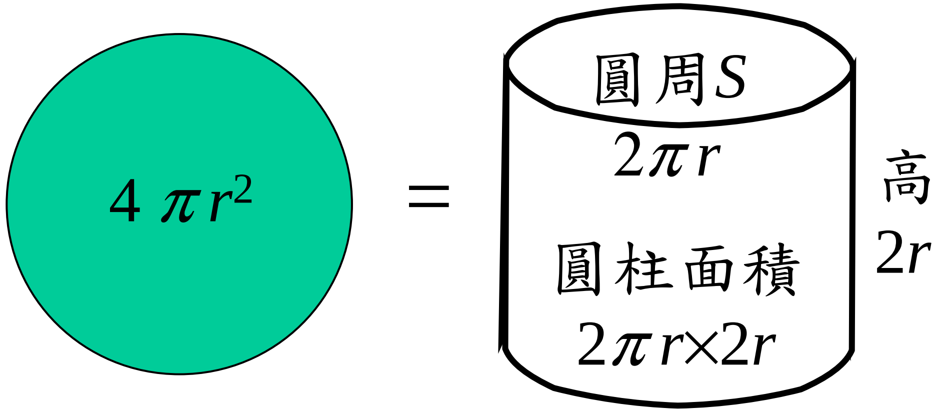
(兩邊同乘$3/r$)

$\Rightarrow$ 球面積 $= 4\pi r^2$

阿基米德的得意之作
另一種看法

- 球面積公式
  - 墓碑上的註記
  - 圓柱內切球面積等於圓柱面面積





挑戰題十一

球面積公式記住了嗎？

球體積公式記住了嗎？

數學物理公式要理解，更要背
是活背，不是死背！
才能靈活而有效率的使用來解決問題

總 結

阿基米得

偉大的科學家

執著、耐力、毅力

數學、物理、創意

下期預告

在海邊撿到許多小石頭的頑童

站在許多偉人肩膀上的巨人

伽利略的繼任者

牛頓

與他的三大貢獻